N$^{\text{O}}$ d'ordre :

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

PAR **Arnaud de LA FORTELLE**

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Contribution à la théorie des grandes déviations et applications

---

Directeur de thèse : **Guy FAYOLLE**

Soutenue le 16 novembre 2000 devant le jury formé de :

MM.	**N. BOULEAU**	Président
	F. COMETS	Rapporteur
	J. LEWIS	Rapporteur
	G. FAYOLLE	Examinateur
	V. MALYCHEV	Examinateur
	G. RUGET	Examinateur

À Nastia

Le calcul

Le calcul, c'est l'abîme. Ah ! tu sors de ta sphère,
Eh bien, tu seras seul. Homme, tâche de faire
Entrer dans l'infini quelque être que ce soit
De ceux que ta main touche et que ton regard voit ;
Nul ne le peut. La vie expire en perdant terre.
Chaque être a son milieu ; hors du bois la panthère
Meurt, et l'on voit tomber, sans essor, sans éclair,
Hors du feu l'étincelle et l'oiseau hors de l'air ;
Nulle forme ne vit loin du réel traînée ;
La vision terrestre à la terre est bornée ;
Le nuage lui-même, errant, volant, planant,
Allant d'un continent à l'autre continent,
S'il voyait l'absolu, serait pris de vertige ;
Sortir de l'horizon n'est permis qu'au prodige ;
L'homme le peut, étant le monstre en qui s'unit
Le miasme du nadir au rayon du zénith ;
Entre donc dans l'abstrait, dans l'obscur, dans l'énorme,
Renonce à la couleur et renonce à la forme ;
Soit ; mais pour soulever le voile, le linceul,
La robe de la pâle Isis, te voilà seul.
Tout est noir. C'est en vain que ta voix crie et nomme.
La nature, ce chien qui, fidèle, suit l'homme,
S'est arrêtée au seuil du gouffre avec effroi.

Regarde. La science exacte est devant toi...

Victor Hugo

Remerciements

Ce travail aurait été bien difficile — s'il eût jamais été achevé — sans l'accueil, l'aide et le conseils qui m'ont constamment été prodigués. Je voudrais donc remercier tous ceux qui ont éclairé ces années, pour ces attentions qui ont marqué mon esprit et mon cœur.

Ma pensée se tourne d'abord vers Guy Fayolle. Sa rencontre au D.E.A. de probabilités de Paris VI est de celles qui marquent. Sa confiance m'a laissé libre dans des recherches tâtonnantes ; les doutes menaient alors droit vers son bureau où sa disponibilité fut mise à rude épreuve, sans jamais vaciller ; ses conseils ont aplani bien des difficultés, ouvert de nouvelles perspectives et sa bonne humeur dissipait les nuages.

L'atmosphère décontractée de l'équipe est largement redevable à Jean-Marc, Franck, Christine, Vadim et Roudolf, avec lesquels les échanges ont été riches et agréables. Merci en particulier à Jean-Marc pour sa compétence en matière d'ordinateur et de logiciels — et pour sa psychologie des utilisateurs ; merci à Franck pour sa collaboration fructueuse ; merci à Danny pour son dévouement efficace.

Je suis reconnaissant à Nicolas Bouleau pour l'orientation qu'il a donnée à mes études et qui m'a conduit ici. Sa participation au jury représente de plus l'École nationale des ponts et chaussées et le ministère de l'Équipement et des transports qui m'ont soutenu, notamment financièrement, et qui continuent de manifester de l'intérêt pour ce travail de recherche.

Les rapporteurs, MM. Francis Comets et John Lewis ont bien voulu se charger de la lourde tâche de rapporteur. Leurs remarques constructives ont permis d'améliorer ce document. Qu'ils en soient remerciés. Merci également à MM. Vadim Malychev et Gabriel Ruget pour leur participation au jury.

Finalement, mes remerciements vont à tous ceux qui — à l'INRIA ou en dehors — ont contribué à enrichir ces années ; une pensée particulière s'adresse aux membres de l'équipe de tennis, dont la rencontre a débouché sur d'autres échanges que celui des balles jaunes.

Merci à tous d'avoir ensoleillé ces heures : la chaleur de votre rencontre ne s'éteindra jamais dans mon cœur.

Arnaud de La Fortelle

Avant-propos

« Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie. »
Blaise Pascal

« Ils traversent ainsi le noir illimité, ce frère du silence éternel. »
Charles Baudelaire

Imaginons les aveugles baudelairiens se déplaçant de façon erratique : voilà une illustration classique de marche aléatoire. Les mathématiciens se sont fixé la gageure de cerner le hasard, par exemple on peut délimiter un couloir que les aveugles ne quitteront presque jamais ; il encadre la trajectoire moyenne. La présente thèse se propose d'étudier ces situations improbables, quand l'évolution déraille vers l'espace infini qui est à l'extérieur de ce canal. Ces ténébreuses considérations, et les formules cabalistiques par lesquelles elles s'expriment, paraissent aussi effrayantes que mystérieuses, et il semble que mieux vaudrait les laisser au silence éternel. Mais enfin, puisqu'il faut être indulgent avec les érudits passionnés, quel sens ose-t-on donner à ces occultes hiéroglyphes ?

Je prends ici le parti d'expliquer en quelques lignes en quoi ce travail de thèse est digne d'intérêt, car il est fréquent de voir le regard se troubler chez des interlocuteurs peu prévenus des choses mathématiques, alors qu'un fil d'Ariane bien perceptible guide toute la réflexion.

Pour atteindre un état exceptionnel, un système emprunte la trajectoire de moindre information. Voilà résumée la thèse en une phrase, dans une formulation rappelant furieusement le principe de moindre action, dont on sait combien il est riche de conséquences. Cependant, pour bien concevoir ce qui s'énonce clairement, il faut définir les notions, comme celle d'*état exceptionnel*, de *système* ou d'*information*.

Ici s'explique le nom de la théorie : une grande déviation, c'est un écart à la normale qui mène à un état exceptionnel. Un système est décrit par l'évolution, selon une *dynamique*, d'un état représenté par des *coordonnées*.

Cette dynamique n'est pas déterministe, mais obéit aux règles des *probabilités*, qui lui dictent ainsi un comportement moyen. L'exception est ainsi définie comme un événement rare. Enfin, les distributions de probabilités permettent de quantifier l'information : mieux un évènement est cerné (et donc plus sa fréquence est faible), plus il fournit d'information.

Déjà le discours cède la place au formalisme mathématique, qui délimite précisément les objets et les opérations licites qui leurs sont associées même si parfois leur sens paraît absent. La différence avec une langue littéraire est que, si les déductions enrichissent dans les deux cas la signification originelle, les démonstrations formalisées n'offrent, elles, pas la moindre place au doute. En outre, la quantification qu'impose au départ la modélisation est conservée au fil des raisonnements si bien que non seulement le sens existe et est maintenu, mais il est encore précisé et concrétisé par une *méthode* qui dévoile de bonnes manières de *mesurer* les phénomènes.

Ces réflexions marquent l'organisation de ce mémoire. La première partie définit, du plus simple vers le plus complexe, les notions, leur représentation abstraite et leur signification. J'ai essayé de présenter en quoi elles me semblent naturelles. Les déductions qui découlent de ces structures ne font que reproduire le schéma de pensée de ce préambule, certes parfois dissimulé sous les notations. L'induction ensuite nous élève vers des sphères de plus haute abstraction, d'où l'on perçoit quelquefois mieux l'essence des phénomènes. Quoi qu'il arrive, il est apparu que certains calculs menaient à des conclusions surprenantes, qui nous font découvrir, ou préciser, les comportements des systèmes analysés. Cette première partie s'attache progressivement à ces explorations.

À coté des concepts et outils classiques — fonction des cumulants, transformée de Legendre, sous-additivité ou principe de contraction — nous développons particulièrement la technique du changement de mesure, les opérations sur les principes faibles et les techniques afférentes. Ces contributions personnelles sont réparties au fil des chapitres ; il s'agit des fonctions de Ruelle-Lanford (section 3.1.3), du changement de mesure tel qu'il est décrit à la section 3.2.1, la contraction pour les principes *faibles* (section 3.3.1) ; les chapitres 4, 5 et 6 sont surtout constitués d'apports personnels, notamment l'adaptation de ces méthodes au temps continu (section 4.2), à des processus non-markoviens (section 6.1.1) ou à des calculs plus précis (section 6.1.2).

De façon plus prospective, il semble que certains domaines soient à portée de main, bien que les démonstrations n'y soient pas rigoureuses : par exemple le lien fort entre fonctions harmoniques, grandes déviations et probabilités stationnaires. Ces considérations sont exposées à la section 4.4.3 et au chapitre 5. Enfin, les difficultés liées aux espaces d'états non-dénombrables sont mentionnées à la section 6.1.3.

La seconde partie est composée de trois articles soumis à publications. Deux sont essentiellement abstraits, mais les concepts, développés dans une grande généralité, n'y sont pas confinés. L'étude d'un modèle en troisième article, valable aussi bien en transport qu'en informatique ou en transmission de données, le prouve. On devrait, par la méthode proposée, parvenir à quantifier le mode de saturation de ces systèmes, et on en imagine sans peine les avantages pratiques, en conception ou pour le contrôle. Et la démarche est loin de se restreindre à cette seule application.

La structure linéaire imposée par l'exposition successive des notions reflète mal la densité des liens qui les unissent. De nombreuses remarques articulent le texte, soit en devançant des concepts d'un niveau plus abstrait, soit en offrant une réflexion personnelle sur des développements possibles. J'espère que cette tentative de m'exprimer clairement ne sera pas ruinée par le langage des mathématiques, car l'unité et la richesse de sens de la théorie des grandes déviations est vraiment un plaisir esthétique que j'espère ici partager.

Arnaud de La Fortelle

Table des matières