

UNE METHODE DE QUASI-NEWTON REDUITE EN OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

AVEC PRIORITE A LA RESTAURATION

Jean Charles GILBERT

boursier scientifique et technique
de la Commission des Communautés Européennes

Centre d'Etudes Nucléaires (D.R.F.C.), B.P. n°6
92265 Fontenay-aux-Roses Cedex (France)

Résumé: Pour minimiser une fonction sur \mathcal{R}^n en présence de m contraintes d'égalité non linéaires, on propose un algorithme ayant les caractéristiques suivantes: chaque itération comprend deux pas de restauration des contraintes et un pas de minimisation de la fonction, les contraintes sont linéarisées une fois par itération, une matrice d'ordre $n-m$ (approximation du hessien réduit du lagrangien) est mise à jour mais pas à chaque itération (un critère de mise à jour est proposé), la méthode est globale avec priorité à la restauration, enfin, la suite de points générée converge Q -superlinéairement.

Abstract: To minimize a function on \mathcal{R}^n with m nonlinear equality constraints, we propose an algorithm with the following features: each iteration is formed of two steps of restoration of the constraints and one step of minimization of the function, the constraints are linearized once per iteration, a matrix of order $n-m$ (approximation of the reduced hessian of the lagrangian) is updated but not at each iteration (a criterion is proposed), the method is global with priority to the restoration and generates a Q -superlinearly converging sequence of points.

I - INTRODUCTION

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , f et c deux applications définies sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^m ($m < n$) respectivement. On considère le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité suivant:

$$\min \{ f(x) : x \in \Omega, c(x) = 0 \} \quad (1.1)$$

On supposera que f et c sont dans $C_b^\nu(\Omega)$ avec $\nu \geq 2$, c'est-à-dire que les i -ième ($0 \leq i \leq \nu$) dérivées $f^{(i)}$ et $c^{(i)}$ sont continues et bornées sur Ω . On supposera également que c est une submersion sur Ω (c'est-à-dire que l'opérateur dérivée, $A_x := A(x) := c'(x)$, qui est une matrice $m \times n$, est surjective quel que soit x dans Ω). Soit x_* un point réalisant un minimum local de (1.1). $A_* := c'(x_*)$ étant surjective, il existe un unique multiplicateur de Lagrange λ_* tel que (x_*, λ_*) vérifie:

$$\begin{cases} c(x_*) = 0 \\ f'(x_*) - A_*^T \lambda_* = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Le système (1.2) comporte $n+m$ équations avec $n+m$ inconnues (x_*, λ_*) . On cherche à le résoudre par une méthode itérative. A partir d'un point $x_0 \in \Omega$, on va générer une suite de couples $((x_k, \lambda_k))_{k \geq 0}$ convergeant vers (x_*, λ_*) . Une première idée serait d'utiliser une méthode de quasi-Newton pour résoudre (1.2). Cela nécessiterait de mettre à jour une matrice d'ordre $n+m$ approchant la jacobienne (ou son inverse) du système (1.2) au couple optimal (x_*, λ_*) . L'avantage d'une telle méthode est de générer des suites (x_k) et (λ_k) convergeant toutes deux Q -superlinéairement (terminologie de Ortega, Rheinboldt (1970)). C'est-à-dire que par exemple pour la suite (x_k) , on aurait:

$$\frac{x_{k+1} - x_*}{\|x_k - x_*\|} \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

Nous allons montrer dans une première étape que si on se contente de la seule convergence Q -superlinéaire de (x_k) , on peut utiliser un algorithme ne mettant à jour qu'une matrice d'ordre $n-m$. Cette méthode est alors bien adaptée aux cas où m est grand et $n-m$ petit comme dans les problèmes d'identification paramétrique dans les équations aux dérivées partielles (Blum, Gilbert, Thooris (1985)).

II - OBTENTION DE L'ALGORITHME

II.1 - Système d'optimalité réduit

Une première étape consiste à réduire la taille du système d'optimalité (1.2). La deuxième équation de (1.2) exprime que le gradient de f en x_* est orthogonal au plan

tangent aux contraintes au point optimal. Il revient au même de dire que la projection orthogonale de $f'(x_*)$ sur $N(A_*)$, le noyau de A_* , est nulle. Comme cela peut s'exprimer par $n-m$ équations ($\dim N(A_*) = n-m$), on peut réduire de $n+m$ à n la taille de système d'optimalité. Pour cela, en un point x de Ω , on introduit une base de $N(A_x)$ dont les vecteurs forment les $n-m$ colonnes d'une matrice injective notée Z_x^- . On a les relations:

$$\begin{aligned} N(A_x) &= R(Z_x^-) \\ A_x Z_x^- &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le projecteur orthogonal sur $N(A_x)$ s'écrit alors

$$Z_x^- (Z_x^{-T} Z_x^-)^{-1} Z_x^{-T}$$

On appelle gradient réduit de f en x , les composantes de la projection orthogonale de $f'(x)$ sur $N(A_x)$ dans la base $Z_x^- (Z_x^{-T} Z_x^-)^{-1}$, à savoir:

$$g(x) := Z_x^{-T} f'(x) \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (2.2)$$

On projette la deuxième équation de (1.2) sur $N(A_*)$ en la multipliant à gauche par Z_*^{-T} . En utilisant (2.1), on obtient le système d'optimalité réduit suivant:

$$\begin{cases} c(x_*) = 0 \\ g(x_*) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

II.2 - La méthode séquentielle quadratique

Pour résoudre (2.3) par une méthode de Newton, on a besoin de la dérivée du gradient réduit (2.2) au point optimal x_* . Pour cela, on fera dorénavant l'hypothèse que, comme fonction de x , la base Z_x^- de $N(A_x)$ est dans $C_D^{\nu-1}(\Omega)$. Alors, en utilisant (2.1) puis (1.2), on obtient comme dans Nocedal, Overton (1985):

$$g'(x_*) = (Z_x^{-T} (f'(x) - A_x^T \lambda_*))'(x_*) = Z_*^{-T} L_* \quad (2.4)$$

où $L_* := L(x_*, \lambda_*)$ et L est le hessien en x du lagrangien l :

$$l(x, \lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i(x)$$

On notera G_* la réduction de L_* au plan $N(A_*)$, à savoir

$$G_* := Z_*^{-T} L_* Z_*^- \quad (2.5)$$

Si x_* vérifie les conditions suffisantes d'optimalité de (1.1), on a:

G_* est définie positive (2.6)

C'est ce que nous supposons. On notera $H_* := G_*^{-1}$ son inverse. La jacobienne de (2.3) en x_* s'écrit grâce à (2.4):

$$J_* := \begin{bmatrix} A_* \\ Z_*^{-T} L_* \end{bmatrix}$$

Elle est non singulière (clair). Pour obtenir son inverse, on introduit comme dans Gabay (1982,a) un inverse à droite A_X^- de A_X ($A_X A_X^- = I_m$). On montre alors qu'il existe un unique inverse à gauche Z_X^- de Z_X ($Z_X^- Z_X = I_{n-m}$) tel que

$$Z_X^- A_X^- = 0 \quad (2.7)$$

A_X^- est $n \times m$, injective et Z_X^- est $(n-m) \times n$, surjective. Par la suite, on supposera que l'application $x \rightarrow (A_X^-, Z_X^-)$ est dans $C_b^{\nu-1}(\Omega)$. De plus, on a:

$$I_n = A_X^- A_X + Z_X^- Z_X \quad (2.8)$$

L'inverse de J_* s'écrit:

$$J_*^{-1} = \begin{bmatrix} A_*^- - Z_*^- H_* Z_*^{-T} L_* A_*^- & Z_*^- H_* \end{bmatrix}$$

On obtient une méthode de Newton pour résoudre (2.3) par

$$x_{k+1} = x_k - J_*^{-1} \begin{bmatrix} c(x_k) \\ g(x_k) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

et une méthode de quasi-Newton en remplaçant dans (2.9), J_*^{-1} par

$$\begin{bmatrix} A(x_k)^- - Z(x_k)^- H_k Z(x_k)^{-T} L_k A(x_k)^- & Z(x_k)^- H_k \end{bmatrix}$$

où L_k est une approximation de L_* telle que $G_k := Z(x_k)^{-T} L_k Z(x_k)^-$ soit non singulière et $H_k := G_k^{-1}$. On retrouve ainsi la formule du déplacement de la méthode séquentielle quadratique (voir Han (1976), Gabay (1982,b)). Goodman (1985) et Nocedal, Overton (1985) donnent un développement analogue. On voit que cette méthode nécessite la mise à jour de L_k qui est d'ordre n . Cette mise à jour a été étudiée par Han (1976) avec la formule DFP et par Powell (1978) avec la formule BFGS.

II.3 - Une méthode de quasi-Newton réduite

On peut encore réduire l'ordre de la matrice à mettre à jour en résolvant séparément les équations du système d'optimalité (2.3). Remarquons d'abord que d'après (2.4)-(2.6),

$g'(x_*)$ est surjective et admet $Z_*^{-1}H_*$ comme inverse à droite. On définit alors deux applications φ et ψ par

$$\varphi(x) := x - A_*^{-1} c(x) \quad (2.10)$$

$$\psi(y) := y - Z_*^{-1} H_* g(y) \quad (2.11)$$

Elles définissent des processus de Newton pour résoudre les deux équations de (2.3). Soit $\xi := \psi \circ \varphi$. On voit que les points fixes de ξ sont les solutions de (2.3). De plus, si x_* vérifie (2.3), on a grâce à (2.4), (2.8) et (2.5):

$$\xi'(x_*) = (I - Z_*^{-1} H_* Z_*^{-T} L_*) Z_*^{-1} Z_* = 0$$

Dès lors, ξ définit un processus à convergence quadratique, c'est-à-dire que si x_0 est pris assez proche de x_* , la suite $(\xi^k(x_0))$ convergera vers x_* et l'ordre de convergence sera \mathcal{Q} -quadratique. Remarquons que l'ordre d'exécution de (2.10) et (2.11) est important puisque $\varphi'(x_*) \psi'(x_*) = -Z_*^{-1} H_* Z_*^{-T} L_* A_*^{-1} A_*$ et que cet opérateur n'est pas nul en général. Soit \bar{x}_k dans Ω . A partir de cet algorithme à convergence quadratique, on définit aisément une méthode de quasi-Newton:

$$\bar{y}_k := \bar{x}_k - R_k c(\bar{x}_k) \quad (2.12)$$

$$\bar{x}_{k+1} := \bar{y}_k - Z(\bar{y}_k)^{-1} H_k g(\bar{y}_k) \quad (2.13)$$

On a obtenu (2.12) à partir de (2.10) en remplaçant A_*^{-1} par une approximation R_k et (2.13) à partir de (2.11) en remplaçant H_* par une approximation H_k et Z_*^{-1} par $Z(\bar{y}_k)^{-1}$ qui est connu puisqu'il intervient dans le calcul du gradient réduit $g(\bar{y}_k)$. Dans cette méthode, R_k est un opérateur que l'on supposera calculable parce qu'il ne fait intervenir que les dérivées premières de c tandis que H_k qui est une matrice d'ordre $n-m$ est mise à jour à chaque itération parce que son calcul ferait intervenir les dérivées secondes de f et c , information que l'on suppose non accessible. On voit que l'on a gagné dans l'ordre de la matrice à mettre à jour. L'algorithme qui vient d'être décrit est étudié en détail dans Gilbert (1985) (voir aussi Coleman, Conn (1982 a et b, 1984) qui ont étudié l'algorithme (2.12)-(2.13) en considérant la suite (\bar{y}_k) qui a de moins bonnes propriétés que (\bar{x}_k)). Une globalisation de la méthode y est introduite en faisant de la recherche sur un arc issu du point \bar{y}_k (voir également Gabay (1982,b)) et tangent au pas de minimisation de f : $\bar{q}_k := -Z(\bar{y}_k)^{-1} H_k g(\bar{y}_k)$. L'arc est paramétré par $\rho \in]0,1]$:

$$\bar{y}_k(\rho) = \bar{y}_k + \rho \bar{q}_k + \rho^2 \bar{r}_{k+1} \quad (2.14)$$

où $\bar{r}_{k+1} := -R_k c(\bar{x}_{k+1})$. Le pas ρ est déterminé par une règle du type Armijo (1966) de manière à faire décroître la fonctionnelle pénalisée exacte:

$$\Theta_p(y) = f(y) + p \|c(y)\|_1 \quad (2.15)$$

Les contraintes étant linéarisées en \bar{y}_k , on peut montrer que si p est assez grand, le déplacement le long de l'arc (2.14) (ρ assez petit) fait décroître Θ_p . L'arc (2.14) étant tangent à \bar{q}_k en $\rho = 0$, on privilégie la phase de minimisation \bar{q}_k de f par rapport à la phase de restauration des contraintes \bar{r}_{k+1} . Nous modifions cette méthode ci-après afin de privilégier la phase de restauration, ce qui dans certaines applications peut être préférable. Pour cela, on introduit une phase de restauration supplémentaire et on prend comme algorithme local à partir d'un point x_k de Ω :

$$y_k := x_k + r_k := x_k - R_k c(x_k) \quad (2.16)$$

$$z_k := y_k + s_k := y_k - S_k c(y_k) \quad (2.17)$$

$$x_{k+1} := z_k + q_k := z_k - Z(y_k)^{-1} H_k g(y_k) \quad (2.18)$$

Le calcul du gradient réduit dans (2.18) montre que les contraintes doivent être linéarisées en y_k . Ce sera le seul point de linéarisation par itération. R_k et S_k sont deux opérateurs de restauration des contraintes calculés tandis que H_k est une matrice d'ordre $n-m$ mise à jour.

III - CONVERGENCE LOCALE ET SUPERLINEAIRE

Théorème 3.1: (convergence linéaire locale). Soit x_* un point de Ω vérifiant (2.3) et (2.6). Soit $\xi > 0$ tel que $\bar{B}(x_*, \xi)$ soit dans Ω . On suppose qu'il existe un réel positif β tel que $\|S_k\| \leq \beta$ pour tout indice k . Alors, il existe une constante C ne dépendant que de f, c, ξ et β telle que si $r \in]0, 1[$ et

$$\|x_0 - x_*\| \leq C r \quad (3.1)$$

$$\max(\|R_k - A_*^{-1}\|, \|H_k - H_*\|) \leq C r \quad \text{pour tout } k \quad (3.2)$$

alors l'algorithme (2.16)-(2.18) génère à partir de x_0 , une suite (x_k) convergeant Q-linéairement vers x_* et pour tout indice k , on a

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq r \|x_k - x_*\| \quad (3.3)$$

Les preuves des lemmes et théorèmes peuvent être trouvées dans Gilbert (1986).

On obtient aisément une condition suffisante de convergence Q-superlinéaire en corollaire du théorème 3.1. Il suffit en effet de supposer en plus des hypothèses du théorème que (R_k) et (H_k) convergent vers A_*^{-1} et H_* respectivement. Mais ces conditions sont trop fortes et ne sont en général pas vérifiées lorsque l'on utilise pour (H_k) la technique de mise à jour introduite plus loin. Le théorème suivant donne une condition suffisante plus faible.

Théorème 3.2: (convergence Q-superlinéaire). Soit x_* un point de Ω vérifiant (2.3) et (2.6). Si (x_k) est dans Ω et générée par l'algorithme (2.16)-(2.18) avec (R_k) , (S_k) et (H_k) bornées et si (x_k) converge vers x_* , alors cette convergence est Q-superlinéaire dès que

$$(R_k - A_*^-) A_* (x_k - x_*) = o(\|x_k - x_*\|) \quad (3.4)$$

$$(G_k - G_*) Z_* (x_k - x_*) = o(\|x_k - x_*\|) \quad (3.5)$$

$$\text{où } G_k := H_k^{-1}.$$

Preuve: On établit la relation suivante:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_* &= Z_*^- H_k (G_k - G_*) Z_* (x_k - x_*) + Z_*^- H_k Z_*^{-T} L_* (R_k - A_*^-) A_* (x_k - x_*) \\ &\quad + (S_k A_*^- - I) (R_k - A_*^-) A_* (x_k - x_*) + o(\|x_k - x_*\|) \end{aligned} \quad (3.6)$$

qui montre que (3.4) et (3.5) suffisent pour obtenir la convergence Q-superlinéaire de (x_k) •

La relation (3.6) montre que si (x_k) converge Q-superlinéairement alors on a

$$(A_* S_k - I) A_* (R_k - A_*^-) A_* (x_k - x_*) = o(\|x_k - x_*\|) \quad (3.7)$$

Tandis que la condition (3.4) n'est pas nécessaire. On voit également que le pas s_k est superflu (on peut prendre $S_k = 0$ pour tout k comme dans Gilbert (1985)) alors que le pas r_k précédent la linéarisation des contraintes est essentiel: en prenant $R_k = 0$, on retrouve le premier algorithme de Gabay (1982,b) et celui de Nocedal, Overton (1985) dont les suites ne convergent pas nécessairement Q-superlinéairement. Dans l'algorithme (2.16)-(2.18), les contraintes étant linéarisées en y_k , on dispose de $A(y_k)$. On peut donc prendre $S_k = A(y_k)^-$. Par contre $A(x_k)$ n'est pas calculé et on prendra pour R_k l'opérateur S_k calculé à l'itération précédente: $A(y_{k-1})^-$. Ce choix de R_k permet de satisfaire à la condition (3.4) lorsque (y_k) converge vers x_* . On définit donc l'algorithme local:

$$y_k := x_k + r_k := x_k - A(y_{k-1})^- c(x_k) \quad (3.8)$$

$$z_k := y_k + s_k := y_k - A(y_k)^- c(y_k) \quad (3.9)$$

$$x_{k+1} := z_k + q_k := z_k - Z(y_k)^- H_k g(y_k) \quad (3.10)$$

où il reste à préciser la manière dont la suite (H_k) est générée.

IV - GLOBALISATION DE L'ALGORITHME

Dans l'algorithme (3.8)-(3.10) ce sera la suite (x_k) qui convergera \mathcal{Q} -superlinéairement vers x_* , mais les contraintes étant linéarisées en y_k , la globalisation se fera au moyen d'une recherche sur Θ_p (défini en (2.15)) le long d'un arc issu de y_k et paramétré par ρ :

$$y_k(\rho) = y_k + \rho s_k + \rho^a q_k + \rho^b r_{k+1} \quad \text{où } 1 \leq a < b \text{ et } 0 < \rho \leq 1 \quad (4.1)$$

Si $a > 1$, l'arc est tangent à s_k en $\rho = 0$ et la phase (s_k) de restauration des contraintes sera d'autant plus privilégiée par rapport à la phase (q_k) de minimisation de f que a est grand. Si $a = 1$, on retrouve le deuxième algorithme de Gabay (1982,b). On définit y_{k+1} par:

$$y_{k+1} := y_k(\rho_k) \quad (4.2)$$

où ρ_k est déterminé par une règle du type Armijo (1966):

$$\beta \in]0,1[\quad (4.3)$$

$$\rho_k := \beta^{l_k} \quad (4.4)$$

où l_k est le plus petit entier naturel tel que

$$\begin{aligned} \Theta_p(y_k(\beta^{l_k})) \leq & \Theta_p(y_k) - \beta^{l_k} \alpha (p - \|\lambda(y_k)\|_\infty) \|c(y_k)\|_1 \\ & - \beta^{al_k} \alpha (H_k g(y_k), g(y_k)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

où Θ_p est défini en (2.15), α sera choisi dans $]0,1/2[$ et $\lambda(y_k)$ est l'approximation du multiplicateur λ_* donnée par

$$\lambda(y_k) := A(y_k)^{-T} f'(y_k) \quad (4.6)$$

Il nous faut à présent examiner dans quelles conditions on peut réaliser l'inégalité (4.5) en prenant l_k suffisamment grand et donc rendre l'arc (4.1) de descente pour Θ_p en y_k .

Lemme 4.1: Soit y_k un point de Ω tel que z_k (par (3.9)), x_{k+1} (par (3.10)) et $x_{k+1} + r_{k+1}$ (par (3.8)) soient également dans Ω . Supposons qu'il existe des réels positifs \underline{p} , \bar{p} , \underline{h} et M_1 tels que $\underline{p} + \|\lambda(y_k)\|_\infty \leq p \leq \bar{p}$, $(H_k - \underline{h}I)$ soit définie positive et $\|H_k\| \leq M_1$. Alors la règle (4.3)-(4.5) permet de déterminer un pas ρ_k positif. Supposons en plus qu'il existe une constante positive M_2 telle que $\|c(y_k)\| \leq M_2$ et $\rho_k^a \|g(y_k)\|^2 \leq M_2$. Alors, il existe un réel $\bar{\rho}$, ne dépendant que de f , c , \underline{p} , \bar{p} , \underline{h} , α , β , a , b , M_1 et M_2 tel que l'on ait $\rho_k \geq \bar{\rho} > 0$.

D'après le lemme 4.1, le paramètre de pénalisation p doit être suffisamment grand pour assurer la décroissance de Θ_p le long de l'arc (4.1). Pour cela p (noté alors p_k) sera modifié à certaines itérations en accord avec les trois règles suivantes:

$$p_k \geq \|\lambda(y_k)\|_\infty + \underline{p} \quad (4.7)$$

il existe un indice K tel que pour tout $k \geq K$

$$p_{k-1} \geq \|\lambda(y_k)\|_\infty + \underline{p} \Rightarrow p_k = p_{k-1} \quad (4.8)$$

$$(p_k) \text{ bornée SSI } p_k \text{ est modifié un nombre fini de fois} \quad (4.9)$$

Dans (4.7) et (4.8), \underline{p} est une constante positive donnée. Par exemple, on pourra prendre la règle de Mayne, Polak (1982):

$$\begin{aligned} \text{si } p_{k-1} &\geq \|\lambda(y_k)\|_\infty + \underline{p} \text{ alors } p_k := p_{k-1} \\ \text{sinon } p_k &:= \max((1+\xi) p_{k-1}, \|\lambda(y_k)\|_\infty + \underline{p}) \end{aligned}$$

où ξ est une constante positive donnée. On dira qu'une suite de matrice (H_k) est uniformément définie positive s'il existe une constante positive C telle que $(H_k v, v) \geq C \|v\|^2$ quels que soient l'indice k et le vecteur v .

Théorème 4.2: (convergence globale). On suppose que f est bornée inférieurement sur Ω . Soient (x_k) , (y_k) et (z_k) des suites de Ω générées par l'algorithme global (3.8)-(4.9) avec $\alpha \in]0,1[$ et (H_k) bornée et uniformément définie positive. Alors,
 (i) soit (p_k) est non bornée et la suite $(y_k: p_k \neq p_{k-1})$ n'a pas de valeur d'adhérence, (ii) soit (p_k) est bornée et $\|c(y_k)\| + \|g(y_k)\| \rightarrow 0$.

Le théorème suivant donne des conditions sur des sous-suites indicées par (k_i) pour que dans celles-ci le pas ρ vaille 1 après un nombre fini d'itérations. Pour cela on considère trois types de sous-suites, caractérisées par l'une des propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} (P_1) \quad & q_{k_i} = o(\|s_{k_i}\|) \text{ pour } i \rightarrow \infty \\ (P_2) \quad & (G_{k_i} - G_*) Z_* q_{k_i} = o(\|q_{k_i}\|) \text{ pour } i \rightarrow \infty \\ (P_3) \quad & 0 < \rho_{k_i} < 1 \text{ pour tout } i \text{ et } q_{k_i} = o(\|r_{k_i}\|) \text{ pour } i \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Théorème 4.3: On suppose que $\nu \geq 3$. Soit x_* un point de Ω vérifiant (2.3) et (2.6). Soient (x_k) , (y_k) et (z_k) des suites de Ω générées par l'algorithme (3.8)-(4.9) avec $\alpha \in]0,1/2[$ et (H_k) bornée et uniformément définie positive. Supposons que (y_k) converge vers x_* . Si (k_i) est une sous-suite d'indices telle que (P_1) ou (P_2) soient vérifiées alors le pas ρ vaut 1 pour i assez grand et si (P_3) est vérifiée alors on a

$$s_{k_i} = o(\|r_{k_i}\| \|q_{k_i}\|) \text{ pour } i \rightarrow \infty \quad (4.10)$$

On voit que lorsque des sous-suites vérifient la propriété (P_1) ou (P_2) , elles admettent un pas unité après un nombre fini d'itérations. Lorsque la propriété (P_3) est vérifiée, on ne peut pas conclure dans le même sens dans le cadre de la méthode globale (3.8)-(4.9). L'algorithme concret de la section suivante génère des suites composées de sous-suites vérifiant l'une des propriétés (P_1) , (P_2) ou (P_3) et lorsque (P_3) est vérifiée, le résultat (4.10) permet de montrer qu'il y a également admissibilité asymptotique du pas unité.

V - MISE A JOUR DE LA MATRICE REDUITE

Il reste à préciser la manière dont on génère la suite (H_k) des matrices d'ordre $n-m$. Pour cela, on utilise une technique de quasi-Newton. On se donne une matrice H_0 symétrique et définie positive. Etant donné H_k , on calcule H_{k+1} de telle sorte que l'on ait:

$$\sigma_k = H_{k+1} \tau_k \quad (5.1)$$

où σ_k et τ_k sont des vecteurs de \mathbb{R}^{n-m} judicieusement choisis. Il y a beaucoup de matrices symétriques définies positives vérifiant (5.1). L'une d'entre elles est donnée par la formule de BFGS bien connue:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(\sigma_k - H_k \tau_k) \sigma_k^T + \sigma_k (\sigma_k - H_k \tau_k)^T}{(\tau_k, \sigma_k)} - \frac{(\tau_k, \sigma_k - H_k \tau_k)}{(\tau_k, \sigma_k)^2} \sigma_k \sigma_k^T \quad (5.2)$$

qui est bien définie si (τ_k, σ_k) est non nul. Cette formule a l'avantage de transmettre la définie positivité de H_k à H_{k+1} SSI (voir Dennis, Moré (1977))

$$(\tau_k, \sigma_k) > 0 \quad (5.3)$$

C'est une première condition sur le choix des vecteurs σ_k et τ_k . Une autre condition provient de la valeur asymptotique désirée pour (H_k) , à savoir H_* . On ne peut pas en général trouver des vecteurs σ_k et τ_k vérifiant la relation $\sigma_k = H_* \tau_k$, ce qui au vu de (5.1) serait souhaitable, mais l'étude des méthodes de quasi-Newton montre qu'il est essentiel que l'on ait:

$$\sigma_k = H_* \tau_k + o(\|\tau_k\|) \quad (5.4)$$

ou de façon équivalente

$$\tau_k = G_* \sigma_k + o(\|\sigma_k\|) \quad (5.5)$$

Comme $G_* = Z_*^{-T} L_* Z_*^-$, la formule (2.4) de dérivation du gradient réduit montre que (5.5) peut éventuellement être vérifiée si τ_k est la différence de deux gradients réduits. Ceux-ci n'étant connus qu'aux points y_k , on prendra

$$\tau_k := g(y_{k+1}) - g(y_k) \quad (5.6)$$

$$\sigma_k := Z(y_{k+1}) (y_{k+1} - y_k) \quad (5.7)$$

En notant $v_k := y_{k+1} - y_k$ et en supposant que (y_k) converge vers x_* point stationnaire de (1.1), on obtient

$$\tau_k = Z_*^{-T} L_* v_k + o(\|v_k\|)$$

Comme $\sigma_k = Z_* v_k + o(\|v_k\|)$, on voit que l'on aura (5.5) si

$$v_k = Z_*^- Z_* v_k + o(\|v_k\|) \quad (5.8)$$

puisque alors $\|v_k\| \sim \|Z_* v_k\|$ (le signe \sim signifie qu'il existe une constante positive C telle que $\|v_k\|/C \leq \|Z_* v_k\| \leq C \|v_k\|$ pour tout k) et donc $\|\sigma_k\| \sim \|v_k\|$. Comme dans Gilbert (1985), on montre que la relation (5.8) est équivalente à

$$\rho_k s_k = o(\|\rho_k^a q_k\|) \quad (5.9)$$

C'est-à-dire que (5.5) sera vérifiée si le pas de restauration calculé en y_k est un petit o du pas de minimisation. Or ceci n'est certainement pas vérifié à chaque itération (par exemple dans les cas où $q_k = 0$ pour tout k). Cette remarque nous conduit à introduire un critère de mise à jour basé sur (5.9):

$$\|s_k\| \leq \mu'_k \rho_k^{a-1} \|q_k\| \quad (5.10)$$

où (μ'_k) est une suite convergeant vers 0. Si les relations (5.3) et (5.10) sont vérifiées, la matrice H_k est mise à jour par la formule de BFGS (5.2) sinon on garde H_{k+1} égal à H_k . Le problème maintenant est de choisir adéquatement la suite (μ'_k) de façon à assurer la convergence Q -superlinéaire de (x_k) . Nocedal, Overton (1985) ont étudié la mise à jour de la matrice réduite de l'algorithme de Gabay (1982,b) en introduisant un critère semblable à (5.10) avec $\rho_k = 1$ (cadre local) et (μ'_k) décroissante et donnée a priori. La convergence superlinéaire (en 2 pas) est assurée si μ'_0 est assez petit. Ici, μ'_k dépendra de l'information disponible à l'itération k et la convergence superlinéaire ne sera pas fonction d'un choix de constante. Le fait d'avoir (5.10) et donc (5.4) permettra, par des techniques classiques (Dennis, Moré (1974)), de montrer que la relation (1.3) est vérifiée lorsque H_k est mise à jour. Pour qu'il en soit également ainsi lorsque H_k n'est pas mise à jour, il est souhaitable que (μ'_k) ne converge pas trop rapidement

vers 0. Le critère utilisé dans l'algorithme ci-après réalise un compromis entre ces deux nécessités. Pour cela, on définit $(k-)$ comme le plus grand indice précédent k pour lequel il y a mise à jour de H_k (0 si ces matrices n'ont pas été mise à jour avant l'itération k) et $(k--)$:= $((k-)-)$. On prendra le critère:

$$\|s_k\| \leq \mu_k \rho_k^{a-1} \|h_{k--}\| \|q_k\| \quad (5.11)$$

où (μ_k) est une suite décroissante générée par l'algorithme et qui convergera vers une constante positive assez petite. On a noté

$$h_k := s_k + q_k \quad (5.12)$$

On obtient finalement l'algorithme suivant:

- | | |
|--|--|
| <p>(1) Choix de $x_0 \in \Omega$, H_0 symétrique définie positive,
 $\mu_0 > 0$ et $0 < \alpha < 1$.
 $k := 0$, $y_0 := x_0$.</p> <p>(2) linéarisation des contraintes en y_0: $\lambda(y_0)$ par (4.6).</p> <p>(3) s_k par (3.9), q_k par (3.10), r_{k+1} par (3.8), h_k par (5.12).</p> <p>(4) adaptation de p_k respectant (4.7)-(4.9).</p> <p>(5) recherche sur Θ_{p_k} en y_k suivant l'arc (4.1).
 ρ_k par la règle k (4.3)-(4.5) et y_{k+1} par (4.1)-(4.2). (5.13)</p> <p>(6) linéarisation des contraintes en y_{k+1}: $\lambda(y_{k+1})$ par (4.6).</p> <p>(7) mise à jour de H_k: τ_k par (5.6), σ_k par (5.7).
 <u>si</u> (5.3) <u>et</u> (5.11) <u>alors</u> H_{k+1} par (5.2) <u>sinon</u> $H_{k+1} := H_k$.</p> <p>(8) adaptation de μ_k:
 <u>si</u> \neg(5.3) <u>et</u> (5.11) <u>et</u> ($\sigma_k \neq 0$) <u>alors</u> $\mu_{k+1} := \mu_k/2$ <u>sinon</u> $\mu_{k+1} := \mu_k$</p> <p>(9) $k := k+1$, aller en (3).</p> | |
|--|--|

On peut montrer un théorème de convergence locale pour l'algorithme (5.13), à savoir que si (x_0, H_0) est choisi suffisamment proche de (x_*, H_*) , l'algorithme (5.13) est bien défini et (x_k) converge Q -linéairement vers x_* (voir Gilbert (1985) pour une démonstration analogue). Le théorème ci-après étudie l'ordre de convergence de la suite (x_k) . On partitionne l'ensemble des indices en trois sous-ensembles:

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{k: (5.3) \text{ et } (5.11) \text{ sont vérifiées}\} \\ K_2 &:= \{k: (5.11) \text{ est vérifiée mais pas } (5.3)\} \\ K_3 &:= \{k: (5.11) \text{ n'est pas vérifiée}\} \end{aligned}$$

Théorème 5.2: On suppose que $\nu \geq 3$. Soit x_* un point de Ω vérifiant (2.3) et (2.6). Soient (x_k) , (y_k) et (z_k) dans Ω et (H_k) des suites générées par l'algorithme (5.13) et supposons que l'on ait

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_*\| < +\infty \quad (5.14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k - x_*\| < +\infty \quad (5.15)$$

$$\sup_{k,1} \frac{\|y_{k+1} - x_*\|}{\|y_k - x_*\|} < +\infty \quad (5.16)$$

Alors (i) la suite (H_k) est bornée et uniformément définie positive, (ii) $(G_k - G_*)\sigma_k = o(\|\sigma_k\|)$ pour $k \in K_1$, (iii) $y_{k+1} - x_* = o(\|y_k - x_*\|)$ pour $k \in K_1$, (iv) $\lim \mu_k =: \mu_\infty > 0$, (v) le pas ρ_k vaut 1 après un nombre fini d'itérations, (vi) la suite (x_k) converge 0-superlinéairement vers x_* .

REMERCIEMENT

Je remercie chaleureusement J.F. Bonnans pour les précieuses discussions que nous avons eues et pour ses amicaux conseils.

REFERENCES

- L. Armijo (1966). Minimization of functions having lipschitz continuous first partial derivatives. Pacific J. Maths 16/1, 1-3.
- J. Blum, J.Ch. Gilbert, B. Thooris (1985). Parametric identification of the plasma current density from the magnetic measurements and the pressure profile, code IDENTC. Centre d'études nucléaires (DRFC), B.P. 6, 92265 Fontenay-aux-Roses (France).
- C.G. Broyden, J.E. Dennis, J.J. Moré (1973). On the local and superlinear convergence of quasi-Newton methods. Journal of the Institute of Mathematics and its Applications 12, 223-245.
- T.F. Coleman, A.R. Conn (1982,a). Nonlinear programming via an exact penalty function: asymptotic analysis. Mathematical Programming 24, 123-136.
- T.F. Coleman, A.R. Conn (1982,b). Nonlinear programming via an exact penalty function: global analysis. Mathematical Programming 24, 137-161.
- T.F. Coleman, A.R. Conn (1984). On the local convergence of a quasi-Newton method for the nonlinear programming problem. SIAM J. Numer. Anal. 21/4, 755-769.

- J.E. Dennis, J.J. Moré (1974). A characterization of superlinear convergence and its applications to quasi-Newton methods. *Mathematics of Computation* 28/126, 549-560.
- J.E. Dennis, J.J. Moré (1977). Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAM Review* 19, 46-89.
- D. Gabay (1982,a). Minimizing a differentiable function over a differentiable manifold. *Journal of Optimization Theory and its Applications* 37/2, 171-219.
- D. Gabay (1982,b). Reduced quasi-Newton methods with feasibility improvement for nonlinearly constrained optimization. *Mathematical Programming Study* 16, 18-44.
- J.Ch. Gilbert (1985). Une méthode à métrique variable réduite en optimisation avec contraintes d'égalité non linéaires. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* (à paraître).
- J.Ch. Gilbert (1986). Thèse. Université de Paris VI. (à paraître)
- J. Goodman (1985). Newton's method for constrained optimization. *Mathematical Programming* 33, 162-171.
- S.P. Han (1976). Superlinearly convergent variable metric algorithms for general nonlinear programming problems. *Mathematical Programming* 11, 263-282.
- D.O. Mayne, E. Polak (1982). A superlinearly convergent algorithm for constrained optimization problems. *Mathematical Programming Study* 16, 45-61.
- J. Nocedal, M.L. Overton (1985). Projected hessian updating algorithms for nonlinearly constrained optimization. *SIAM J. Numer. Anal.* 22/5, 821-850.
- J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt (1970). Iterative solution of nonlinear equations of several variables. Academic Press, New York.
- M.J.D. Powell (1971). On the convergence of the variable metric algorithm. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* 7, 21-36.
- M.J.D. Powell (1978). The convergence of the variable metric methods for nonlinearly constrained optimization calculations. *Nonlinear Programming* 3, 27-63. eds: O.L. Mangasarian, R.R Meyer, S.M. Robinson. Academic Press.