B A N Géophysique

Modélisation et Simulation d'écoulements peu profonds à surface libre

M.O. Bristeau

– Emmanuel **AUDUSSE**, Paris Nord

– François **BOUCHUT**, ENS –> Paris Est

– Marie-Odile **BRISTEAU**,

– Benoît **PERTHAME**,

– Marica **PELANTI**, Post-doc

– Jacques **SAINTE-MARIE**, Lab. Saint-Venant & Macs.

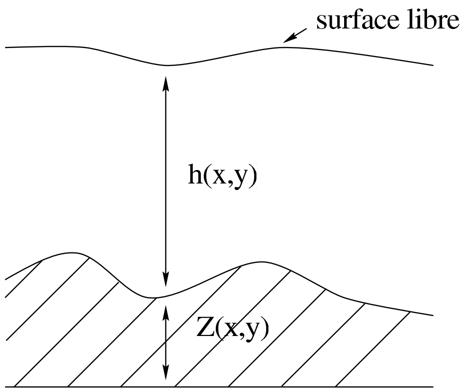
Ecoulements à surface libre

Rivières, lacs, océans

Quelques applications :

– Onde de submersion suite à une **rupture de barrage** (EDF),
– Prévention et contrôle des **inondations** (Cemagref),
– Effet du **ruissellement** sur les terres cultivées (Inra),
– Aménagements côtiers,
– Phénomènes de **houle** (Ports, plateformes pétrolières),
– Transport et dispersion de **polluants**,
– Ecoulements **stratifiés**, Ecosystèmes aquatiques.
– **Avalanches** de débris, avalanches sous-marines.

Modélisation



- **Navier-Stokes** incompressible
- Condition cinématique pour la surface libre
- Imperméabilité du fond, frottement

Hypothèses :

• Hauteur d'eau "petite" par rapport à la dimension horizontale de l'écoulement

$$\epsilon = \frac{H}{L}, \quad \epsilon << 1$$

• topographie varie peu

Approximation $O(\epsilon)$

• Vitesse horizontale constante suivant la verticale

• Pression hydrostatique

Equations de Saint-Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{div}(h\mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial h\mathbf{u}}{\partial t} + \mathrm{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla(\frac{g}{2}h^2) = -gh\nabla Z_b - \kappa\mathbf{u}$$

- h, hauteur d'eau, g, constante de gravité,
- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, vitesse, $\mathbf{q}(t,x,y) = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix} = h\mathbf{u}$, débit,
- $Z_b(x,y)$, cote du fond, $h(t,x,y) + Z_b(x,y)$, cote de la surface libre.

Propriétés

- Système hyperbolique pour $h > 0$

- Domaine invariant $h \geq 0$

- Etats d'équilibre,

$$\mathbf{u} = 0, h + Z_b = \mathrm{C}$$

- Inégalité d'entropie

Discrétisation

– Volumes finis, schéma cinétique
– Termes sources, schéma équilibre

Formulation cinétique

Soit $\chi(w)$ définie sur $\mathbb{R}^2$,

- $\chi(w) \geq 0, \quad \chi(-w) = \chi(w)$,
- $\int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ w_i w_j \end{pmatrix} \chi(w)\ dw = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_{ij} \end{pmatrix}$,
- $\exists w_M \in \mathbb{R}$, tel que $\quad \chi(w) = 0$ for $|w| \geq w_M$.

Densité de particules $M(t,x,\xi)$ (équilibre de Gibbs) définie par

$$M(t,x,\xi) := M(h, \xi - \mathbf{u}) = \frac{h(t,x)}{\tilde{c}^2}\ \chi(\frac{\xi - \mathbf{u}(t,x)}{\tilde{c}}),$$

avec

$$\tilde{c}^2 = \frac{g\,h}{2}.$$

On vérifie que

$$\begin{pmatrix} h \\ \mathbf{q} \\ \dfrac{\mathbf{q}\otimes\mathbf{q}}{h} + \dfrac{g}{2}\ h^2\mathbf{Id} \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi\otimes\xi \end{pmatrix} M(\xi)\ d\xi,$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = -\int_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} \nabla_\xi M(\xi)\ d\xi.$$

Proposition

Les fonctions $(h, \mathbf{q})$ sont solutions du système de Saint-Venant si et seulement si $M(\xi)$ satisfait l'équation cinétique :

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \xi \cdot \nabla_x M - g \nabla Z \cdot \nabla_\xi M = Q(t, x, \xi),$$

pour un “terme de collision ” $Q(t, x, \xi)$ qui satisfait p.p.t. $(t,\ x)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q \ d\xi = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} \xi Q \ d\xi = 0.$$

L'équation cinétique est linéaire !

De Saint-Venant à Navier-Stokes

- **Saint-Venant Multicouches**

– Vitesse horizontale constante par couche

  $\Rightarrow$ forts frottements, recirculations (effet du vent)

- **“Boussinesq”**

– Termes non-hydrostatiques

  $\Rightarrow$ pression dynamique, houle

- **Savage-Hutter, Bouchut-Westdickenberg**

– Faible variation de la pente, topographie quelconque

  $\Rightarrow$ avalanches

- **Densité variable** (température, salinité)

$\Rightarrow$ écoulements stratifiés

Collaborations

- ANR Méthode : Modélisation de l'Ecoulement sur une Topographie avec des Hétérogénéités Orientées et des Différences d'Echelle Univ. Orléans, INRA, Cemagref, Cermics
- EDF/LNHE (Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement) Ecoulements stratifiés (densité variable $\rho(S,T)$), upwellings
- Institut de Physique du Globe de Paris / Sismologie