SOLVABILITÉ DES EDSPR :
MÉTHODES DE DÉCOUPLAGE ET DE RÉCURRENCE.

FRANÇOIS DELARUE

La théorie des EDS progressives-rétrogrades constitue un prolongement naturel de la notion d'EDS rétrograde introduite par Pardoux et Peng [5] au début des années 90. Le principe sous-jacent vise à coupler fortement une EDS classique de type Itô à une EDS rétrograde : le qualificatif fort indique que chacune des équations dépend de la solution de l'autre. De telles équations fournissent une représentation probabiliste des solutions d'EDP quasi-linéaires, i.e. d'EDP dont générateur et second membre dépendent de la solution et éventuellement de son gradient. Elles apparaissent également dans certains problèmes de contrôle ou dans la modélisation de marchés financiers soumis à l'existence de gros investisseurs.

La connexion profonde entre les deux équations complique de façon non triviale la résolution et la compréhension de ce type de systèmes. Nous nous focalisons dans ce contexte sur la présentation de deux résultats d'existence et d'unicité des solutions, valables l'un et l'autre dans le cas de coefficients déterministes et d'une matrice de diffusion uniformément elliptique, et soulignons les rouages principaux de chacune des deux approches.

La première [4] s'appuie sur la théorie des EDP non-linéaires présentée dans le célèbre ouvrage de Ladyzhenskaya et al. [3] et vise au travers d'un schéma, dit *schéma à quatre temps*, à s'appuyer sur l'existence d'une solution forte de l'EDP associée pour découpler l'équation rétrograde de l'équation de diffusion. Sous les hypothèses de régularité adéquates, cette méthode de découplage s'avère suffisamment robuste pour offrir une stratégie probabiliste de discrétisation de l'EDP (voir l'exposé de S. Menozzi).

La deuxième approche [1] vise à affaiblir les hypothèses de la précédente, et repose dans ce contexte sur deux mouvements distincts. Dans une première phase, la solvabilité de l'EDS progressive-rétrograde est établie à l'aide du théorème de point fixe sur un intervalle de temps suffisamment court. Dans une seconde, nous montrons qu'il est possible de prolonger la solution par recollements successifs : la validité des recollements tient essentiellement à la possibilité de contrôler *a priori* le gradient de l'EDP quasi-linéaire correspondante. Cette méthode est de fait baptisée “méthode de récurrence”. En suivant [2], nous donnons une preuve probabiliste de l'estimation des dérivées premières de l'EDP associée.

Références

[1] Delarue, F. (2002) : On the existence and uniqueness of solutions to FBSDEs in a non-degenerate case. *Stochastic Process. Appl.*, **99**, pp. 209–286.

[2] Delarue, F. (2003) : Estimates of the Solutions of a System of Quasi-Linear PDEs. A Probabilistic Scheme. *Séminaire de Probabilités* XXXVII, pp. 290–332

[3] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'tseva, N.N. (1968) : Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI.

[4] Ma, J., Protter, P., Yong, J. (1994) : Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly - a four step scheme. Probab. Theory Rel. Fields, **98**, pp. 339–359.

[5] Pardoux, É, Peng, S. (1992) : Backward stochastic differential equations and quasi-linear parabolic partial differential equations. In : Rzosvskii, B.L., Sowers, R.S. (Eds). Stochastic partial differential equations and their applications, Lect. Notes in Control & Info. Sci, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, **176**, pp. 200–217.