ALGORITHME PROBABILISTE POUR LES EDP PARABOLIQUES QUASI-LINÉAIRES.

STÉPHANE MENOZZI

A partir de la théorie des EDSPR, nous proposons un schéma numérique probabiliste pour les EDP paraboliques quasi-linéaires du second ordre. Cet algorithme fournit par ailleurs une procédure de discrétisation de l'EDSPR associée.

La plupart des méthodes numériques proposées jusqu'à présent pour discrétiser des EDSPR reposent sur des techniques analytiques de type différences finies pour approcher en un premier temps l'EDP sous-jacente. Cette approximation est ensuite utilisée pour obtenir une discrétisation d'Euler de l'équation progressive. Le schéma proposé par Douglas, Ma et Protter [3] s'inscrit dans ce cadre.

A l'opposé, notre stratégie s'inspire du schéma de discrétisation temps-espace initialement introduit par Chevance [2] dans le cas découplé (équations semi-linéaires). Dans ce cadre, l'équation progressive se réduit à une EDS "classique" qui apparaît donc comme une "diffusion objective". Dans ce cas particulier, l'idée de discrétisation temps-espace permet d'utiliser une approche usuelle de "principe de programmation dynamique".

Dans le cas couplé, soit dans le cadre quasi-linéaire, la diffusion n'est plus "objective". En particulier, il n'est plus possible de quantifier un schéma de discrétisation du processus de diffusion comme dans Bally et al. [1], dans la mesure où nous ne pouvons pas obtenir "a priori", i.e. sans approcher la solution de l'EDP, de grille optimale pour ce dernier. Nous quantifions donc les incréments Browniens qui apparaissent dans la discrétisation de l'EDS progressive et nous choisissons de définir la diffusion approchée sur une suite de grilles Cartésiennes tronquées d-dimensionnelles. Indiquons que la procédure de discrétisation de l'équation progressive est désormais fortement couplée à l'approximation de la solution de l'EDP et de son gradient.

Du point de vue numérique, nous illustrons l'algorithme par deux exemples :
- l'équation de Burgers unidimensionnelle à coefficient de viscosité non nul.
- la résolution d'un problème de contrôle à partir de la formulation Hamiltonienne (principe de Peng).

Références

[1] V. Bally, G. Pagès, and J. Printems. A quantization tree method for pricing and hedging multi-dimensional American options. *Tech. report of the university Paris VI, Lab. Prob. et Mod. Al., To appear in Math. Fin.*, 753, 2002.

[2] D. Chevance. Numerical methods for Backward Stochastic Differential Equations. *Publ. Newton Inst., Cambridge University Press*, pages 232–234, 1997.

[3] J. Douglas, J. Ma, and P. Protter. Numerical methods for Forward-Backward Stochastic Differential Equations. *Ann. Appl. Prob.*, 6 :940–968, 1996.