

ECOLE POLYTECHNIQUE  
Programme International  
ERSHOVA Tatiana

RAPPORT DE STAGE D'OPTION SCIENTIFIQUE

Schémas d'ordre supérieur et applications en finance.

NON CONFIDENTIEL

|                                 |   |
|---------------------------------|---|
| <u>Option :</u>                 | MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  |
| <u>Champ de l'option :</u>      | mathématiques financières   |
| <u>Directeur de l'option :</u>  | Nicole EL KAROUI  |
| <u>Directeur de stage :</u>     | Arturo KOHATSU-HIGA, Peter TANKOV   |
| <u>Dates du stage :</u>         | 5 avril 2005–13 juillet 2005  |
| <u>Adresse de l'organisme :</u> | INRIA<br>Domaine de Voluceau–Rocquencourt– B.P. 105<br>78153 Le Chesnay Cedex France. |

**Résumé :** Nous étudions le problème d'approximation de  $Ef(X_T)$  par  $Ef(\bar{X}_T^h)$  où  $f$  est une fonction bornée et mesurable,  $X_T$  est la solution d'une équation différentielle stochastique et son approximation  $\bar{X}_T^h$  est obtenue par schéma de discrétisation avec le pas  $h$ . Nous examinons le schéma d'Euler, le schéma de Milshtein et le schéma de Ninomiya et Victoir dans lesquels on utilise une variable aléatoire gaussienne. Après avoir obtenu  $\bar{X}_T^h$  nous appliquons une méthode de Monte Carlo pour calculer  $Ef(\bar{X}_T^h)$ . Il existe deux types d'erreur qui correspondent respectivement au schéma de discrétisation et à la méthode de Monte Carlo. Nous considérons deux possibilités pour diminuer le temps de calcul, soit en remplaçant la variable gaussienne par une autre variable aléatoire soit en appliquant la méthode de réduction de variance.

**Abstract :** We study the approximation problem of  $Ef(X_T)$  by  $Ef(\bar{X}_T^h)$ , where  $f$  is a bounded measurable function,  $X_T$  is the solution of a stochastic differential equation, and its approximation  $\bar{X}_T^h$  is defined by the discretisation scheme with step  $h$ . We examine Euler scheme, Milshtein scheme and Ninomiya-Victoir scheme where a normal random variable is used. Once  $\bar{X}_T^h$  is obtained, we apply the Monte Carlo method to compute  $Ef(\bar{X}_T^h)$ . There exist two error types which correspond to the discretisation scheme and the Monte Carlo method respectively. We consider two possibilities to diminish the computation time : the replacement of a normal random variable with some other random variable and the application of the variance reduction technique.

# Table des matières

# 1 Introduction

Nous considérons l'équation différentielle stochastique écrite sous la forme :

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad X(0) = X_0 \quad (1)$$

où  $X_t$  est un processus stochastique dans  $R^d$ ,

$W_t$  est un mouvement brownien de dimension  $l$ ,

$b : R^d \times [0, \infty) \rightarrow R^d$ , ce vecteur appelé la dérive ou le drift de l'équation.

$\sigma : R^d \times [0, \infty) \rightarrow R^{d \times l}$ , appelé coefficient de diffusion.

$X_0$  est un  $d$ -vecteur.

Nous dénotons la solution de l'équation (1) avec la condition initiale  $X_s = x$  par  $X_t^{s,x}$ .

Pour simuler le processus  $X_t$  on peut l'approcher par le processus discrétisé  $\{\bar{X}_k^h, \quad h \in R^+, \quad k = 0, \dots, n\}$ . Nous divisons l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  sous-intervalles avec le pas égal à  $h = T/n$ . Nous obtenons donc la discrétisation  $\{\bar{X}_k^h, \quad h \in R^+, \quad k = 0, \dots, n\}$ . En accord avec notre notation  $\bar{X}_n^h = \bar{X}_T^h$ .

**Définition.** Discrétisation  $\{\bar{X}_k^h, \quad h \in R^+, \quad k = 0, \dots, n\}$  a l'ordre fort de convergence  $\beta > 0$  si

$$E(\|\bar{X}_T^h - X_T\|) \leq ch^\beta \quad (2)$$

pour une constante  $c$  et  $h$  assez petit.

**Définition.** Discrétisation  $\{\bar{X}_k^h, \quad h \in R^+, \quad k = 0, \dots, n\}$  a l'ordre faible de convergence  $\beta > 0$  si

$$|Ef(\bar{X}_T^h) - Ef(X_T)| \leq ch^\beta \quad (3)$$

pour une constante  $c$ ,  $h$  assez petit et tous les  $f$  de l'ensemble  $C_P^{2\beta+2}$  où la constante  $c$  peut dépendre de la fonction  $f$ .  $C_P^{2\beta+2}$  est l'ensemble des fonctions  $R^d \rightarrow R$  telles que leurs dérivées de l'ordre  $0, \dots, 2\beta + 2$  sont bornées polynomialement.

**Définition.** Fonction  $g : R^d \rightarrow R$  est **bornée polynomialement** si  $|g(x)| \leq k(1 + \|x\|^q)$  pour des constantes  $k, q$  et pour tous  $x \in R^d$

Si  $\beta$  est plus grand alors l'erreur de la discrétisation converge plus vite à 0. Souvent, l'ordre de convergence faible est plus grand que l'ordre fort.

## 2 Schéma d'Euler

Le schéma d'Euler a la forme :

$$\bar{X}_{p+1}^h = \bar{X}_p^h + b(\bar{X}_p^h, ph)h + \sigma(\bar{X}_p^h, ph)(W_{(p+1)h} - W_{ph}) \quad (4)$$

où

$$\bar{X}_{p+1}^h = \bar{X}_p^h + b(\bar{X}_p^h, ph)h + \sigma(\bar{X}_p^h, ph)\sqrt{h}Z_{p+1} \quad (5)$$

où  $W_t$  est le processus de Wiener et  $Z_1, \dots, Z_n$  sont les variables gaussiennes indépendantes avec l'espérance 0 et la variance 1. Nous allons regarder la convergence faible du schéma d'Euler et nous étudierons la possibilité de remplacer  $Z_i$  par une autre variable aléatoire, telle que celle de Bernoulli, de Student etc.

Dans ce chapitre nous avons utilisé le travail de Talay et Tubaro [8]. Ils ont trouvé l'erreur de la discrétisation pour le schéma d'Euler pour les fonction d'objectif de  $C^\infty$  et quand une variable  $Z_i$  est gaussienne. Nous généralisons son travail pour le cas d'autre variable aléatoire. Nous allons formuler les même propositions, lemmes et théorèmes que dans son travail mais avec autre contraintes à la variable aléatoire.

### 2.1 Ordre de convergence

On suppose que  $E[||X_0||^2] < \infty$  et pour tous  $x, y \in R^d$  et  $t \in [0, T]$  les conditions suivantes sont réalisées

1.  $||b(x, t) - b(y, t)|| + ||\sigma(x, t) - \sigma(y, t)|| \leq K||x - y||$  (condition de Lipschitz)
2.  $||b(x, t)|| + ||\sigma(x, t)|| \leq K(1 + ||x||)$  (condition de croissance souslinéaire)
3.  $E(||X_0 - \bar{X}_0^h||) \leq K\sqrt{h}$
4.  $||b(x, s) - b(x, t)|| + ||\sigma(x, s) - \sigma(x, t)|| \leq K(1 + ||x||)\sqrt{|t - s|}$

Alors le schéma d'Euler a **l'ordre fort** égal à 1/2. La troisième condition est vérifiée si on prend  $X_0 = \bar{X}_0^h$

Ci-après nous allons étudier l'ordre faible de ce schéma. Il faut donc estimer l'erreur

$$Err(T, h) = Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T^h) \quad (6)$$

Nous considérons la classe  $F_T$  des fonctions  $\phi : [0, T] \times R^d \rightarrow R$  avec les propriétés suivantes

1.  $\phi \in C^\infty$
2. il existe  $s \in N$  et  $C(T) > 0$  tels que il réalise l'inégalité :

$$\forall \theta \in [0, T], \quad \forall x \in R^d : \quad |\phi(\theta, x)| \leq C(T)(1 + |x|^s) \quad (7)$$

**Définition.** Une fonction  $\phi \in F_T$  s'appelle **homogène** si elle ne dépend pas du temps :  $\phi(\theta, x) = \phi(x)$ .

Nous dénotons par  $L$  l'opérateur différentiel associé à (1)

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_j^i(t, x) \partial_{ij} + \sum_{i=1}^d b^i(t, x) \partial_i \quad (8)$$

où  $a(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$ .

Si  $\phi \in F_T$  alors la fonctions  $u(\theta; t, x)$  :

$$u(\theta; t, x) = E\phi(\theta, X_T^{t,x}) = E_{t,x}\phi(\theta, X_T) \quad (9)$$

vérifié l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= 0 \\ u(\theta; T, x) &= \phi(\theta, x) \end{cases}$$

**Théorème 1.** Nous prenons les fonctions  $b(t, X_t)$  et  $\sigma(t, X_t) \in C^\infty$  avec les dérivées bornées de tous les ordres et une fonction homogène  $f \in F_t$  et  $u(t, x) = Ef(X_T^{x,t})$  qui est la solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= 0 \\ u(T, x) &= f(x) \end{cases}$$

Alors nous avons

$$Err(T, h) = Eu(T, \bar{X}_n^h) - Eu(0, X_0) \quad (10)$$

Preuve :

Nous savons que  $u(t, x) = Ef(X_T^{x,t})$  d'où  $Eu(0, X_0) = Ef(X_T)$ . La ligne dernière du système nous donne aussi  $u(T, x) = f(x)$ . Alors  $f(\bar{X}_n^h) = u(T, \bar{X}_n^h)$  et l'équation (10) est vérifiée. ■

Décomposons  $Eu(T, \bar{X}_n^h) - Eu((n-1)h, \bar{X}_{n-1}^h)$  en série de Taylor autour de  $((n-1)h, \bar{X}_{n-1}^h)$

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t, x + \Delta x) &= u(t, x + \Delta x) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t, x + \Delta x) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x + \Delta x) + \dots \\ &= u(t, x) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \\ &\quad + \Delta t \sum_{|\alpha|=1} \Delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \partial_\alpha u(t, x) + \frac{1}{2} \Delta t \sum_{|\alpha|=2} \Delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \partial_\alpha u(t, x) \\ &\quad + \frac{1}{6} \Delta t \sum_{|\alpha|=3} \Delta x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \partial_\alpha u(t, x) + \sum_{|\alpha|=1}^4 \frac{1}{\alpha!} (\Delta x)^\alpha \partial_\alpha u(t, x) + \dots \end{aligned}$$

où  $\Delta x^\alpha = (\Delta x_1)^{\alpha_1} \dots (\Delta x_r)^{\alpha_r}$

Ici comme  $\partial_\alpha$  nous prenons la dérivée partielle de l'ordre  $|\alpha|$  :

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_r^{\alpha_r}} \quad (11)$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ , et  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ .

**Proposition 2.1.** *La variable aléatoire  $Z_p = (Z_{p,1}, Z_{p,2}, \dots, Z_{p,l})$  est telle que*

1.  $Z_{p,i}$  et  $Z_{p,j}$  sont indépendants pour  $\forall p$  et  $i \neq j$ .
2.  $EZ_{p,i} = 0$  pour  $\forall p, \quad \forall i$
3.  $EZ_{p,i}^2 = 1$  pour  $\forall p, \quad \forall i$
4.  $EZ_{p,i}^3 = 0$  pour  $\forall p, \quad \forall i$
5.  $EZ_{p,i}^4 < \infty$  pour  $\forall p, \quad \forall i$

Après simplifications nous obtenons que

$$Eu(T, \bar{X}_n^h) = Eu((n-1)h, \bar{X}_{n-1}^h) + h^2 E\psi((n-1)h, \bar{X}_{n-1}^h) + h^3 R_n^h \quad (12)$$

où

$$\begin{aligned}
\psi(t, x) = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d b^i(t, x) b^j(t, x) \partial_{ij} u(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d b^i(t, x) a_k^j(t, x) \partial_{ijk} u(t, x) \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) + \sum_{i=1}^d b^i(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \partial_i u(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_j^i(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \partial_{ij} u(t, x) \\
& + \frac{1}{24} \sum_{i,j,k,m=1}^d \left[ \sum_{n,\alpha=1}^l \sum_{n \neq \alpha} (\sigma_{i,n} \sigma_{j,n}) (\sigma_{k,\alpha} \sigma_{m,\alpha}) \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^l (\sigma_{i,n} \sigma_{j,n} \sigma_{k,n} \sigma_{m,n} E[Z_n^4]) \right] \partial_{ijkm} u(t, x)
\end{aligned}$$

Ici nous écrivons  $R_n^h$  pour le cas de dimension 1 aussi nous ne regardons pas les termes d'ordre  $h$

$$\begin{aligned}
R_n^h(t, x) = & \frac{1}{4} b^2(t, x) \sigma^2(t, x) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} + \frac{1}{2} b^2(t, x) \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t \partial x^2} \\
& + \frac{3}{2} b(t, x) \sigma^2(t, x) \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t \partial x^3} + \frac{1}{6} b^3(t, x) \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial x^3}
\end{aligned}$$

Pour estimer l'erreur (41) nous avons besoin d'estimer les dérivées partielles dans les formules pour  $\psi$  et  $R_n^h$ . On va utiliser donc quelques lemmes et propositions. Preuve de la première se trouve dans Kunita [5] .

**Lemme 2.1.** *Soit les fonctions  $b$  et  $\sigma \in C^\infty$  telles que ses dérivées de tous les ordres sont bornées. Pour multi-index  $\alpha$ , il existe les constants  $k_\alpha(T) > 0$  et  $C_\alpha(T) > 0$  telles que :*

$$\forall \theta \in [0, T] : \quad |\partial_\alpha u(\theta; t, x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^{k_\alpha(T)}) \quad (13)$$

Grâce à ce lemme nous avons l'estimation pour  $|\partial_\alpha u(\theta; t, x)|$  en terme de  $|x|^{k_\alpha(T)}$ . Mais au lieu de  $x$  il y a la discrétisation  $\bar{X}_p^h$ . Il reste donc d'avoir l'estimation pour  $|\bar{X}_p^h|^k$  quand la variable aléatoire  $Z_p$  satisfait aux conditions de la proposition 2.1. Le lemme suivant est consacré à cette estimation avec autre condition à  $Z_p$ .

**Lemme 2.2.** *Soient  $b_i, \sigma_i$  des fonctions lipschitziennes continues et une variable aléatoire  $Z_p$  telle que*

$$1. \quad EZ_p = 0, \quad E|Z_p| < \infty.$$

$$2. \quad Ee^{kc|Z_p|\sqrt{h} - \frac{1}{2}kc^2h|Z_p|^2} < e^{d_k} \text{ pour } \forall k \text{ où } c \text{ et } d_k \text{ sont constantes.}$$

Alors pour  $\forall k \in N$  il existe une constante  $C_k > 0$  telle que

$$E|\bar{X}_p^h|^k \leq e^{C_k T} \quad (14)$$

pour  $\forall p, \quad 0 \leq p \leq n$ .

Preuve :

Examinons l'espérance de  $|\bar{X}_p^h|^k$ .

$\bar{X}_p^h = \bar{X}_{p-1}^h + b(\bar{X}_{p-1}^h, (p-1)h)h + \sigma(\bar{X}_{p-1}^h, (p-1)h)\sqrt{h}Z_p$ , où  $Z_p$  est une variable aléatoire de la condition du lemme, indépendante de  $\bar{X}_{p-1}^h$ . On peut estimer la partie droite grâce à la condition de Lipschitz des fonctions  $b$  et  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} |\bar{X}_p^h| &\leq |\bar{X}_{p-1}^h| + |b(\bar{X}_{p-1}^h, (p-1)h) - b(X_0, (p-1)h) + b(X_0, (p-1)h)|h + \\ &\quad + |(\sigma(\bar{X}_{p-1}^h, (p-1)h) - \sigma(X_0, (p-1)h) + \sigma(X_0, (p-1)h))||Z_p|\sqrt{h} \\ &\leq |\bar{X}_{p-1}^h| + c_1 |\bar{X}_{p-1}^h - X_0|h + c_2 |\bar{X}_{p-1}^h - X_0||Z_p|\sqrt{h} \\ &\quad + |b(X_0, (p-1)h)|h + |\sigma(X_0, (p-1)h)||Z_p|\sqrt{h} \\ &\leq |\bar{X}_{p-1}^h|(1 + c_1 h + c_2 |Z_p|\sqrt{h}) + (|b(X_0, (p-1)h)| + c_1 |X_0|)h \\ &\quad + (|\sigma(X_0, (p-1)h)| + c_2 |X_0|)|Z_p|\sqrt{h} \end{aligned}$$

Par condition du lemme  $b(x, t)$  et  $\sigma(x, t)$  sont les fonctions continues. Elles atteignent donc ses maximums et minimums à l'intervalle  $[0, T]$

$$|b(X_0, (p-1)h)| \leq \max \left\{ \left| \max_{t \in [0, T]} b(X_0, t) \right|, \left| \min_{t \in [0, T]} b(X_0, t) \right| \right\} = c_3$$

$$|\sigma(X_0, (p-1)h)| \leq \max \left\{ \left| \max_{t \in [0, T]} \sigma(X_0, t) \right|, \left| \min_{t \in [0, T]} \sigma(X_0, t) \right| \right\} = c_4$$

Nous prenons  $c = \max\{c_1, c_2, (c_3 + c_1|X_0|), (c_4 + c_2|X_0|)\}$  Alors

$$|\bar{X}_p^h| \leq |\bar{X}_{p-1}^h|(1 + ch + c|Z_p|\sqrt{h}) + ch + c|Z_p|\sqrt{h} \leq (|\bar{X}_{p-1}^h| + 1)(1 + ch + c|Z_p|\sqrt{h})$$

On dénote  $1 + ch + c|Z_p|\sqrt{h} = \xi_p$ .

On applique ensuite la démonstration par l'induction.

Soit  $\mathbf{k} = 1$ .

Nous savons que v.a.  $Z_p$  est indépendante de  $\bar{X}_{p-1}^h$  d'où nous obtenons  $E|\bar{X}_p^h| \leq E(|\bar{X}_{p-1}^h| + 1)E\xi_p = E\xi_p + E\xi_p E(|\bar{X}_{p-1}^h|)$ . Les variables aléatoires  $|Z_p|, |Z_{p-1}|, \dots, Z_0$  sont indépendantes et de même loi. C'est-à-dire que  $E\xi_p = E\xi_{p-1} = \dots = E\xi_0 = m < \infty$  par condition du lemme.

$$E|\bar{X}_p^h| \leq m(1 + \dots + m^{p-1}) + m^p E\bar{X}_0^h = m \left( \frac{1-m^p}{1-m} \right) + m^p X_0 < const$$

Soit  $k \neq 1$  et  $E|\bar{X}_p^h|^i \leq e^{C_i T}$  si  $i < k$ .

Nous savons que v.a.  $Z_p$  est indépendante de  $\bar{X}_{p-1}^h$  d'où nous obtenons

$$\begin{aligned}
E|\bar{X}_p^h|^k &\leq E\xi_p^k \sum_{i=0}^k C_k^i E|\bar{X}_{p-1}^h|^i \\
&\leq E\xi_p^k (E|\bar{X}_{p-1}^h|^k + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i E|\bar{X}_{p-1}^h|^i) \\
&\leq E\xi_p^k (E|\bar{X}_{p-1}^h|^k + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i e^{C_i T}) \\
&\leq E\xi_p^k (E|\bar{X}_{p-1}^h|^k + d(k, T))
\end{aligned} \tag{15}$$

où  $d(k, T) = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i e^{C_i T} \leq \left( \max_{i=0, \dots, k-1} e^{C_i T} \right) \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \leq \left( \max_{i=0, \dots, k-1} e^{C_i T} \right) 2^k$ . Les variables aléatoires  $|Z_p|, |Z_{p-1}|, \dots, Z_0$  sont indépendantes et de même loi d'où  $E\xi_p^k = E\xi_{p-1}^k = \dots = E\xi_0^k = m$ . Nous appliquons la décomposition (15) à  $E|\bar{X}_{p-1}^h|^k$  etc et obtenons la formule suivante

$$E|\bar{X}_p^h|^k \leq X_0 m^p + d(k, T) m E(1 + m + \dots + m^{p-1}) = X_0 m^p + d(k, T) m \frac{1 - m^p}{1 - m}$$

Regardons  $m = E(1 + ch + c|Z_p|\sqrt{h})^k = Ee^{k \ln(1 + ch + c|Z_p|\sqrt{h})}$ . Si  $x \rightarrow 0$ ,  $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2$ . Aussi nous ne laissons que les termes d'ordre  $h$  et  $\sqrt{h}$ . Alors  $m = Ee^{kch + kc|Z_p|\sqrt{h} - \frac{1}{2}kc^2h|Z_p|^2} = e^{kch} Ee^{kc|Z_p|\sqrt{h} - \frac{1}{2}kc^2h|Z_p|^2}$ .

Si la variable aléatoire  $Z_p$  telle qu'il existe  $Ee^{kc|Z_p|\sqrt{h} - \frac{1}{2}kc^2h|Z_p|^2} < e^{const_k}$  pour  $\forall k$  alors  $E|\bar{X}_p^h|^k \leq e^{C_k T}$ . ■

## Exemples

1. La variable aléatoire gaussienne  $Z_p \sim N(0, 1)$ .

$$\begin{aligned}
&Ee^{kc|Z_p|\sqrt{h} - \frac{1}{2}kc^2h|Z_p|^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}c^2|x|^2kh + kc\sqrt{h}|x|} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2(1+c^2kh)+2kc\sqrt{h}|x|}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{k^2c^2h}{2(1+c^2kh)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(|x|\sqrt{1+c^2kh} + \sqrt{\frac{k^2c^2h}{1+c^2kh}})^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+c^2kh}} e^{\frac{k^2c^2h}{2(1+c^2kh)}} \left[ N\left(\sqrt{\frac{k^2c^2h}{1+c^2kh}}\right) + 1 - N\left(-\sqrt{\frac{k^2c^2h}{1+c^2kh}}\right) \right] \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+c^2kh}} e^{\frac{k^2c^2h}{2(1+c^2kh)}} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^k
\end{aligned}$$

2. La variable aléatoire de Bernoulli  $p(Z_p = 1) = p(Z_p = -1) = \frac{1}{2}$   
 $Ee^{kc|Z_p|\sqrt{h}-\frac{1}{2}kc^2h|Z_p|^2} = e^{kc\sqrt{h}-\frac{1}{2}kc^2h} = e^k \text{ const}$

Grâce à ces lemmes nous avons obtenu qu'il existe une constante  $C(T)$  indépendante de  $h$  telle que

$$|R_n^h| \leq C(T) \quad (16)$$

Ensuite nous supposons que la v.a.  $Z_i$  est telle que les conditions des lemmes précédents sont accomplies.

Nous continuons décomposer  $Eu(T, \bar{X}_n^h)$  en série de Taylor  $n$  fois et obtenons :

$$Eu(T, \bar{X}_n^h) = Eu(0, X_0) + h^2 \sum_{j=0}^{n-1} E\psi(jh, \bar{X}_j^h) + h^2 R^h \quad (17)$$

où  $|R^h| \leq C(T)$ .

Nous utilisons les mêmes propositions que Talay et Tubaro, les preuves se trouvent dans [8].

**Proposition 2.2.** *Il existe le nombre réel  $C(T)$  indépendant de  $h$  tel que*

$$h \sum_{j=0}^{n-1} E|\psi(jh, \bar{X}_j^h)| \leq C(T) \quad (18)$$

**Proposition 2.3.** *Pour  $\forall \phi \in F_T$  il existe le nombre réel  $C(T)$  indépendant de  $h$  tel que*

$$E\phi(\theta, \bar{X}_T^h) = E\phi(\theta, X_T) + R_T(h) \quad \text{où} \quad |R_T(h)| \leq C(T)h \quad (19)$$

**Proposition 2.4.**

$$|h \sum_{j=1}^{n-1} E\psi(jh, \bar{X}_j^h) - \int_0^T E\psi(s, X_s)ds| = O(h) \quad (20)$$

**Théorème 2.** 1. *Pour le schéma d'Euler l'erreur est donnée par*

$$Err(T, h) = -h \int_0^T E\psi(s, X_s)ds + O(h^2) \quad (21)$$

où

(a)  $\psi$  est défini au-dessus.

(b) les fonctions  $b$  et  $\sigma \in C^\infty$  telles que ses dérivées de tous les ordres sont bornées

(c)  $f \in F_t$  est fonction homogène

(d)  $Z_p$  satisfait aux conditions de la proposition 2.1.

(e)  $Ee^{kc|Z_p|\sqrt{h}-\frac{1}{2}kc^2h|Z_p|^2} < e^{d_k}$  pour  $\forall k$  où  $c$  et  $d_k$  sont constantes.

2. Il est possible d'obtenir la décomposition sous la forme

$$Err(T, h) = e_r(T)h^r + e_{r+1}(T)h^{r+1} + \dots + e_m(T)h^m + O(h^{m+1}) \quad (22)$$

Le schéma d'Euler a aussi l'ordre  $O(h)$  quand la fonction  $f$  est mesurable et bornée. Pour des éléments de preuve de ce type de résultats, voir [1].

## 2.2 Extrapolation

Nous considérons le cas du schéma tel que  $Err(T, h) = e_1(T)h + O(h^2)$  et regardons l'approximation nouvelle (l'extrapolation de Romberg)

$$Z_T^h = 2Ef(\bar{X}_T^{h/2}) - Ef(\bar{X}_T^h) \quad (23)$$

Alors

$$Ef(X_T) - Z_T^h = O(h^2) \quad (24)$$

Il est possible d'obtenir le résultat de la précision de l'ordre  $h^2$  à l'aide des résultats obtenus par schéma de l'ordre 1. Il est possible aussi étendre le résultat si (22) est vérifié. Nous prenons la séquence  $h_0 > h_1 > h_2 > \dots > h_m$ . Les valeurs correspondues sont

$$Z_{i0} = Ef(\bar{X}_T^{h_i})$$

. Nous construisons le schéma

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & Z_{00} \\ & & & & & & Z_{01} \\ Z_{10} & & & & & & Z_{02} \\ & & & & & & Z_{11} & \dots & Z_{mm} \\ Z_{20} & & & & & & Z_{m2} \\ & & & & & & Z_{m1} \\ & & & & & & Z_{m0} \end{array}$$

où

$$Z_{i,k} = Z_{i,k-1} + \frac{Z_{i,k-1} - Z_{i-1,k-1}}{\frac{h_{i-k}}{h_i} - 1} \quad (25)$$

Alors

$$Ef(X_T) - Z_{m,m}(h) = O(h^{m+1}) \quad (26)$$

## 2.3 Les cas particuliers de l'équation différentielle de la dimension 1

Nous examinons l'erreur du schéma d'Euler pour deux modèles (Black et Scholes et Ornstein-Uhlenbeck) et deux fonctions d'objectif.

**Modèle de Black et Scholes** est décrit par équation  $dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dW_t$   
La solution de cette équation est  $X_t = X_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$

**Modèle d'Ornstein-Uhlenbeck** est décrit par équation  $dX_t = -bX_t dt + \sigma dW_t$

La solution de cette équation est  $X_t = X_0 e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dW_s$

### 2.3.1 Modèle de Black et Scholes et modèle d'Ornstein-Uhlenbeck, fonction d'objectif $x^2$

Nous voudrions estimer une constant de l'erreur d'approximation pour la variable aléatoire gaussienne et la variable aléatoire de Bernoulli.

On peut remarquer que la fonction  $\psi$  est différente dans le cas de la variable gaussienne et dans le cas de la variable de Bernoulli. C'est le coefficient près de  $b^4(n-1)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(n-1)$  qui est le seul terme différent. Mais dans deux modèles de Black et Scholes et d'Ornstein-Uhlenbeck pour la fonction  $x^2$  ce terme ne joue aucun rôle (parce que  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ ).

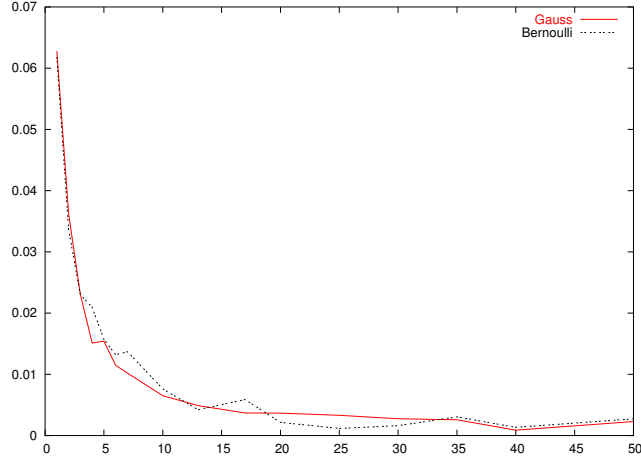


FIG. 1 – Erreur du schéma d'Euler. Modèle de Black et Scholes quand  $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $K = e^{0.1}$ ,  $T = 1$ ,  $x_0 = 1$ , pour 1000 000 trajectoire. Le nombre de partition change de 1 à 50

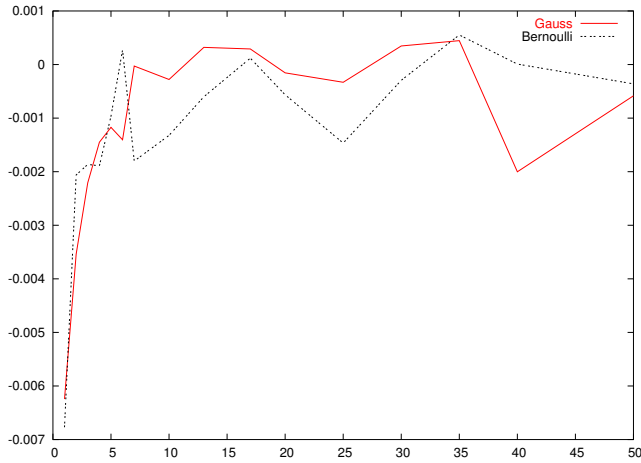


FIG. 2 – Erreur du schéma d'Euler. Modèle de Ornstein-Uhlenbeck quand  $b = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $K = e^{-0.1}$ ,  $T = 1$ ,  $x_0 = 1$  pour 1000 000 trajectoire. Le nombre de partition change de 1 à 50

### 2.3.2 Modèle de Black et Scholes, fonction d'objectif $1_{\{X_T < K\}}$

On regarde le modèle de Black et Scholes. Pour ce modèle nous avons  $\bar{X}_{p+1}^h = b\bar{X}_p^h + \sigma\bar{X}_p^h\sqrt{h}Z_i$ , alors

$$\bar{X}_n^h = X_0 \prod_{i=1}^n (1 + bh + \sigma\sqrt{h}Z_i) \quad (27)$$

Nous voudrions estimer l'erreur du schéma d'Euler pour la fonction d'indicatrice

$$E1_{\{\bar{X}_n^h < K\}} - E1_{\{X_T < K\}} = p(\bar{X}_n^h < K) - p(X_T < K) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} p(\bar{X}_n^h < K) &= p\left(\forall i \quad |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| < 1\right) p\left(\ln \bar{X}_n^h < \ln K \mid \forall i \quad |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| < 1\right) \\ &\quad + p\left(\exists i \quad |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| > 1\right) p\left(\bar{X}_n^h < K \mid \exists i \quad |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| < 1\right) \end{aligned}$$

1) D'abord on va trouver l'ordre de  $\mathbf{P}_1 = p\left(\ln \bar{X}_n^h < \ln K \mid \forall i \quad |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| < 1\right)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= p\left(\sum_{i=1}^n \ln(1 + bh + \sigma\sqrt{h}Z_i) < \ln \frac{K}{X_0} \mid \forall i \quad |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| < 1\right) \\ &= p\left(\sum_{i=1}^n (bh + \sigma\sqrt{h}Z_i) - \frac{1}{2}(bh + \sigma\sqrt{h}Z_i)^2 < \ln \frac{K}{X_0}\right) \\ &= p\left(\sum_{i=1}^n \sigma\sqrt{h}Z_i < \ln \frac{K}{X_0} - bT + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 h Z_i^2\right) \\ &= p\left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{n}} < \frac{\ln \frac{K}{X_0} - bT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{n}\right) \quad \text{soit } d = \frac{\ln \frac{K}{X_0} - bT}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= p\left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{n}} < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{n}\right) \pm p\left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{n}} < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}(1 + \frac{1}{n^\alpha})\right). \end{aligned}$$

$$\text{Nous savons que : } p\left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{n}} < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{n}\right) - p\left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{n}} < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}(1 + \frac{1}{n^\alpha})\right) \leq$$

$$p\left(d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}(1 + \frac{1}{n^\alpha}) < \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{n}} < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{n}\right) \leq p\left(1 + \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{i=1}^n \frac{Z_i^2}{n}\right) =$$

$$p\left(n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n (Z_i^2 - 1) > 1\right) \leq E\left(n^{k(\alpha-1)} \left(\sum_{i=1}^n (Z_i^2 - 1)\right)^k\right) \text{ pour } \forall k \text{ pair}$$

$$= n^{k(\alpha-1)} E\left(\left(\sum_{i=1}^n (Z_i^2 - 1)\right)^k\right) = C_1 n^{\frac{k}{2}} n^{k(\alpha-\frac{1}{2})} = C_1 n^{k(\alpha-\frac{1}{2})} \text{ parce que les variables aléatoires } Z_i \text{ sont indépendantes et } E(Z_i^2 - 1) = 0. \text{ On peut déduire}$$

que  $\alpha$  doit être plus petit que  $\frac{1}{2}$  dans cette approximation. Nous avons obtenu

$$\mathbf{P}_1 \leq C_1 n^{k(\alpha-\frac{1}{2})} + p \left( \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sqrt{n}} < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right) \pm p \left( Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right) \pm$$

$p \left( Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right)$  où  $Y$  est variable aléatoire gaussienne. En appliquant le théorème de Berry-Esseen nous obtenons

$$\mathbf{P}_1 \leq C_1 n^{k(\alpha-\frac{1}{2})} + C_2 n^{-\frac{1}{2}} + p \left( Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right) \pm p \left( Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right)$$

Il reste à estimer la différence des probabilités

$$p \left( Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right) - p \left( Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right) = p \left( d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} < Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right) =$$

$$d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \int_{d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}}^{\frac{\sigma\sqrt{T}}{2n^\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \int_0^{\frac{\sigma\sqrt{T}}{2n^\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_0^{\frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{2}n^\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{2}n^\alpha} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{2}n^\alpha}\right)^2} \frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{2}n^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 n^{-2\alpha}} c n^{-\alpha} \leq c n^{-\alpha} = C_3 n^{-\alpha} \text{ Alors}$$

$$\mathbf{P}_1 \leq C_1 h^{k(\frac{1}{2}-\alpha)} + C_2 h^{\frac{1}{2}} + C_3 h^\alpha + p \left( Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right) \leq C_3 h^\alpha + p \left( Y < d + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right)$$

**2)** Ensuite nous estimons  $\mathbf{P}_2 = p \left( |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| < 1 \right)$

Si  $Z_i$  est variable de Bernoulli alors  $P_2 = 1$  si  $h$  est assez petit.

Le cas de la variable gaussienne est décrit ci-dessous.

$$\mathbf{P}_2 = p(-1 < bh + \sigma\sqrt{h}Z_i < 1) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2h}} e^{-\frac{(x-bh)^2}{2\sigma^2h}} dx = \int_{\frac{-1-bh}{\sqrt{2\sigma^2h}}}^{\frac{1-bh}{\sqrt{2\sigma^2h}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2h}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy = \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2h}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2h}} \sqrt{2\sigma^2h} = 1 - C_4 e^{-\frac{1}{2\sigma^2h}} \sqrt{h}$$

**3)** La probabilité qu'il existe  $i$  pour lequel

$$p(|bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| > 1) = 1 - p(\forall j \ |bh + \sigma\sqrt{h}Z_j| < 1) = 1 - \mathbf{P}_2^n = (1 - \mathbf{P}_2)(1 + \mathbf{P}_2^n + \dots + \mathbf{P}_2^{n-1}) \leq C_4 e^{-\frac{1}{2\sigma^2h}} \sqrt{h} n = C_4 T e^{-\frac{1}{2\sigma^2h}} \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Alors si  $h \rightarrow 0$ ,  $p(\exists i \ |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| > 1) \rightarrow 0$  et  $p(\forall i \ |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| < 1) \rightarrow 1$

Et on peut ne pas calculer  $p \left( \bar{X}_{nh} < K \mid \exists i \ |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| < 1 \right)$

Pour la fonction d'indicatrice nous avons obtenu l'erreur du schéma d'Euler d'ordre  $h^\alpha$  d'où le théorème.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} x \left( 1 + \frac{2x^2}{1*3} + \frac{(2x^2)^2}{1*3*5} + \dots \right) \text{ si } x \ll 1 \quad \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left( x^{-1} - \frac{1}{2}x^{-3} + \frac{3}{4}x^{-5} - \frac{15}{8}x^{-7} \right) \text{ si } x \gg 1$$

**Théorème 3.** *Si les variables aléatoires indépendantes de la même loi de distribution  $Z_1, \dots, Z_n$  telles que  $EZ_i = 0$ ,  $EZ_i^2 = 1$ ,  $E|Z_i|^3 < \infty$  et  $p(\exists i \mid |bh + \sigma\sqrt{h}Z_i| > 1) \rightarrow 0$  alors l'erreur du schéma d'Euler dans le modèle de Black et Scholes pour la fonction d'indicatrice a l'ordre  $h^\alpha$  où  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$*

### 3 Schémas d'ordre supérieur

#### 3.1 Schéma de Milshtein

Rappelons le schéma d'Euler (4) qui donne l'approximation d'ordre  $O(h)$  pour le drift et d'ordre  $O(\sqrt{h})$  pour le terme de la diffusion. Le schéma de Milshtein comprends le terme d'ordre  $O(\sqrt{h})$  pour la diffusion. Nous introduisons les opérateurs associés à l'équation (1).

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^d b \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{k=1}^l \sigma_{i,k} \sigma_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad (29)$$

$$L^k = \sum_{i=1}^d \sigma_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad k = 1, \dots, l \quad (30)$$

Pour une fonction  $f(x, t) : R^d \rightarrow R$  deux fois différentiable nous appliquons la formule d'Itô vectorielle <sup>2</sup>

$$df(X(t), t) = L^0 f(X(t), t) dt + \sum_{k=1}^l L^k f(X(t), t) dW_k(t)$$

Nous commençons par la présentation

$$X_i(t+h) = X_i(t) + \int_t^{t+h} b_i(X(u), u) du + \sum_{k=1}^l \int_t^{t+h} \sigma_{i,k}(X(u), u) dW_k(u), \quad i = 1, \dots, d \quad (31)$$

Ensuite nous approchons chaque intégrale de la partie droite. Le schéma d'Euler donne  $b(X(u), u) = b(X(t), t)$ ,  $u \in [t, t+h]$  pour la première intégrale.

---

<sup>2</sup>Nous dénotons  $W_t$  comme  $W(t)$  et  $X_t$  comme  $X(t)$  dans cette section

Pour obtenir meilleur approximation de  $b(X(u), u)$  nous commençons par représentation exacte

$$b_i(X(u), u) = b_i(X(t), t) + \int_t^u L^0 b_i(X(s), s) ds + \sum_{k=1}^l \int_t^u L^k b_i(X(s), s) dW_k(s) \quad (32)$$

C'est la formule d'Itô appliquée à  $b(X(u), u)$ . Ensuite nous appliquons l'approximation d'Euler à chaque intégrale apparue dans (32). Autrement dit, nous prenons  $L^0 b_i(X(s), s) = L^0 b_i(X(t), t)$  et  $L^k b_i(X(s), s) = L^k b_i(X(t), t)$  pour  $s \in [t, u]$  et obtenons

$$b_i(X(u), u) = b_i(X(t), t) + L^0 b_i(X(t), t) \int_t^u ds + \sum_{k=1}^l L^k b_i(X(t), t) \int_t^u dW_k(s)$$

Alors

$$\int_t^{t+h} b_i(X(u), u) du = b_i(X(t), t)h + L^0 b_i(X(t), t) I_{(0,0)} + \sum_{k=1}^l L^k b_i(X(t), t) I_{(k,0)}$$

où

$$I_{(0,0)} = \int_t^{t+h} \int_t^u ds du = \frac{1}{2} h^2$$

$$I_{(k,0)} = \int_t^{t+h} \int_t^u dW_k(s) du, \quad k = 1, \dots, l$$

Cela nous donne l'approximation du premier terme de la formule (31). Nous faisons les même discours pour sa deuxième intégrale.

$$\sigma_{i,k}(X(u), u) = \sigma_{i,k}(X(t), t) + \int_t^u L^0 \sigma_{i,k}(X(s), s) ds + \sum_{j=1}^l \int_t^u L^j \sigma_{i,k}(X(s), s) dW_j(s)$$

Alors

$$\int_t^{t+h} \sigma_{i,k}(X(u), u) dW_k(u) = \sigma_{i,k}(X(t), t)h + L^0 \sigma_{i,k}(X(t), t)I_{(0,k)} + \sum_{j=1}^l L^j \sigma_{i,k}(X(t), t)I_{(j,k)}$$

où

$$I_{(0,k)} = \int_t^{t+h} \int_t^u ds dW_k(u), \quad k = 1, \dots, l$$

$$I_{(j,k)} = \int_t^{t+h} \int_t^u dW_j(u) dW_k(u), \quad j, k = 1, \dots, l$$

Dans  $I_{(j,k)}$  nous intégrons d'abord par  $W_j$  et ensuite par  $W_k$ . Cette interprétation se généralise quand  $j = 0$  et  $W_0(t) \equiv t$ . Nous combinons les expansions précédentes et recevons le schéma

$$\begin{aligned} \bar{X}_i(t+h) = & \bar{X}_i(t) + b_i(\bar{X}_i(t), t)h + \sum_{k=1}^l \sigma_{i,k}(\bar{X}(t), t)\Delta W_k \\ & + \frac{1}{2}L^0 b_i(\bar{X}(t), t)h^2 + \sum_{k=1}^l L^k b_i(\bar{X}(t), t)I_{(k,0)} \\ & + \sum_{k=1}^l \left( L^0 \sigma_{i,k}(\bar{X}(t), t)I_{(0,k)} + \sum_{j=1}^l L^j \sigma_{i,k}(\bar{X}(t), t)I_{(j,k)} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

pour  $i = 1, \dots, d$ ,  $\Delta W_k = W_k(t+h) - W_k(t)$ . Au lieu de  $I_{(0,0)}$  nous avons écrit  $\frac{1}{2}h^2$  dans cette formule. Aussi

$$\begin{aligned} I_{(0,j)} = & hW_j(t+h) - \int_t^{t+h} W_j(u)du = h[W_j(t+h) - W_j(t)] \\ & - \int_t^{t+h} [W_j(u) - W_j(t)]du \\ = & h\Delta W_j - I_{(j,0)} \end{aligned}$$

Kloeden et Platen [4] ont montré que ce schéma a l'ordre faible 2 quand on remplace  $\Delta I_j$  par  $\frac{1}{2}\Delta W_j h$ .

Avant d'utiliser le schéma (33) nous avons besoin de modéliser pour  $j = 1, \dots, l$  l'incrément brownien  $\Delta W_j$  d'accord avec  $I_{(j,0)}$  et  $I_{(j,k)}$  pour  $k = 1, \dots, l$ .

### 3.1.1 La condition de commutativité

Il est difficile de simuler l'intégrale mixée  $I_{(j,k)}$  quand  $j \neq k$ . Alors le schéma (33) n'est pas applicable en pratique sans les simplification. Nous pouvons éviter de modéliser telles intégrales si **la condition de commutativité** est accomplie pour notre modèle

$$L^k \sigma_{i,j} = L^j \sigma_{i,k}, \quad i = 1, \dots, d$$

Cette condition est artificielle, elle ne satisfait pas souvent la pratique. Quand même elle donne les simplifications de (33). Nous écrivons un terme de ce schéma.

$$\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l L^j \sigma_{i,k} I_{(j,k)} = \sum_{j=1}^l L^j \sigma_{i,j} I_{(j,j)} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=j+1}^l L^j \sigma_{i,k} (I_{(j,k)} + I_{(k,j)})$$

Les éléments de la diagonal sont qualifiés comme  $(\Delta W_j^2 - h)/2$  (voir le cas scalaire) et sont simulés facile. La condition de commutativité donne la somme

$$I_{(j,k)} + I_{(k,j)} = \Delta W_j \Delta W_k$$

Cela vient de la formule d'Itô appliquée à  $W_j(t)W_k(t)$

$$W_j(t+h)W_k(t+h) - W_j(t)W_k(t) = \int_t^{t+h} W_k(u) dW_j(u) + \int_t^{t+h} W_j(u) dW_k(u)$$

Et cette somme est modélisée facilement.

### 3.1.2 Le cas scalaire

Nous considérons le cas  $d = 1$ . Comme  $I_{(0,0)}$ ,  $I_{(0,1)}$ ,  $I_{(1,0)}$  et  $I_{(1,1)}$  nous avons

$$I_{(0,0)} = \frac{1}{2} h^2$$

$$I_{(1,1)} = \frac{1}{2} [(\Delta W)^2 - h]$$

$$I_{(0,1)} = h \Delta W - I_{(1,0)}$$

$$I_{(1,0)} = \int_t^{t+h} [W_u - W_t] du$$

Le domaine  $I_{(1,0)}$  et l'incrément  $\Delta W = W_{t+h} - W_t$  sont conjointement normaux pour  $W_t$  donné. Chaque a l'espérance conditionnelle 0. La variance conditionnelle de  $\Delta W$  est  $h$  et celle de  $I_{(1,0)}$  est  $h^3/3$ . Pour leur covariance notons d'abord

$$E[I_{(1,0)} | W_t, \Delta W] = \frac{1}{2} h \Delta W$$

alors  $E[I_{(1,0)} \Delta W] = \frac{1}{2} h^2$ . Nous pouvons simuler  $W_{t+h} - W_t$  et  $I_{(1,0)}$  comme

$$\begin{pmatrix} \Delta W \\ \Delta I \end{pmatrix} \sim N \left( 0, \begin{pmatrix} h & \frac{1}{2} h^2 \\ \frac{1}{2} h^2 & \frac{1}{3} h^3 \end{pmatrix} \right) \quad (34)$$

### 3.2 Schéma de Ninomiya et Victoir

Soient  $V_0, \dots, V_d$  les champs de vecteur. Nous définissons l'opérateur différentiel  $L = V_0 + \frac{1}{2}(V_1^2 + \dots + V_d^2)$ . Nous considérons l'équation différentielle parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= -Lu(t, x) \\ u(T, x) &= f(x) \end{cases} \quad (35)$$

Soit  $Y_{t,x}$  la solution de l'équation différentielle stochastique écrite sous la forme de Stratonovich :

$$Y_{t,x} = x + \int_0^t V_0(Y_{s,x}) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t V_i(Y_{s,x}) \circ dW_s^i \quad Y_{0,x} = x \quad (36)$$

$$dY_{t,x} = \sum_{i=0}^d V_i(Y_{t,x}) \circ dW_t^i \quad Y_{0,x} = x \quad (37)$$

Par convention  $W_t^0 = t$ . La fonction  $u(t, x) = Ef(Y_{T-t,x})$  est la solution de l'équation (35). Nous nous intéressons au  $Ef(Y_{T,x})$  qui est  $u(0, x)$ .

**Notation** Si  $V$  est champ de  $C^\infty$  de vecteur ( $C_b^\infty(R^N, R^N)$ ) alors  $\exp(V)(x)$  dénote la solution au moment 1 de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dz_t}{dt} = V(z_t), \quad z_0 = x \quad (38)$$

pour  $x \in R$

**Théorème 4.** Nous supposons que  $(\Lambda_i, Z_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes où  $\Lambda_i$  est variable de Bernoulli indépendante de  $Z_i$  qui est variable gaussienne de la dimension  $d$ . Définissons  $\{\bar{X}_k^h\}_{k=0, \dots, n}$  par formules suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{X}_0^h &= x, \\ \bar{X}_{k+1}^h &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{V_0}{2n}\right) \exp\left(\frac{Z_k^1 V_1}{\sqrt{n}}\right) \dots \exp\left(\frac{Z_k^d V_d}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{V_0}{2n}\right) (\bar{X}_k^h) & \text{si } \Lambda_k = +1 \\ \exp\left(\frac{V_0}{2n}\right) \exp\left(\frac{Z_k^d V_d}{\sqrt{n}}\right) \dots \exp\left(\frac{Z_k^1 V_1}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{V_0}{2n}\right) (\bar{X}_k^h) & \text{si } \Lambda_k = -1 \end{cases} \quad (39)$$

Alors pour  $\forall f \in C_b^\infty(R^N)$ ,

$$|Ef(X_1) - Ef(Y(1, x))| \leq \frac{C_f}{n^2} \quad (40)$$

et cet algorithme a l'ordre 2.

En faisant les même considérations que pour le schéma d'Euler nous obtenons

$$Err(T, h) = Ef(X_T) - Ef(\bar{X}_T^h) = Eu(0, x) - Eu(T, \bar{X}_T^h), \quad X_0 = x \quad (41)$$

Comme dans le schéma d'Euler nous décomposons  $Eu(0, x) - Eu(T, \bar{X}_T^h)$  en série de Taylor  $Eu(0, x) - Eu(T, \bar{X}_T^h) = E \sum_{i=1}^n (u(ih, \bar{X}_i^h) - u((i+1)h, \bar{X}_{i+1}^h))$  où  $h = \frac{1}{n}$ . Nous joignons et imputons un terme  $u((i+1)h, \bar{X}_i^h)$ . Cette somme aura l'air  $\sum_{i=1}^n E(u(ih, \bar{X}_i^h) - u((i+1)h, \bar{X}_i^h)) - E(u((i+1)h, \bar{X}_{i+1}^h) - u((i+1)h, \bar{X}_i^h)) =$   
 $= \sum_{i=1}^n E(u(ih, \bar{X}_i^h) - u((i+1)h, \bar{X}_i^h))$   
 $- \frac{1}{2}E \left[ u((i+1)h, \exp\left(\frac{V_0}{2n}\right) \exp\left(\frac{Z_k^1 V_1}{\sqrt{n}}\right) \dots \exp\left(\frac{Z_k^d V_d}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{V_0}{2n}\right) (\bar{X}_i^h)) - u((i+1)h, \bar{X}_i^h) \right]$   
 $- \frac{1}{2}E \left[ u((i+1)h, \exp\left(\frac{V_0}{2n}\right) \exp\left(\frac{Z_k^d V_d}{\sqrt{n}}\right) \dots \exp\left(\frac{Z_k^1 V_1}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{V_0}{2n}\right) (\bar{X}_i^h)) - u((i+1)h, \bar{X}_i^h) \right]$   
 Nous regardons un terme de cette somme. Nous savons que

$$u(t, x) = Ef(X_T^{t,x})$$

$$u((i+1)h, x) = Ef(X_T^{(i+1)h,x})$$

$$u(ih, x) = Eu((i+1)h, X_{(i+1)h}^{ih,x})$$

Par formule d'Itô

$$X_{(i+1)h}^{ih, \bar{X}_i^h} = \bar{X}_i^h + \int_{ih}^{(i+1)h} b(t, X_t^{ih, \bar{X}_i^h}) dt + \int_{ih}^{(i+1)h} \sigma(t, X_t^{ih, \bar{X}_i^h}) dW_t$$

Alors

$$\begin{aligned} u(ih, \bar{X}_i^h) &= Eu((i+1)h, X_{(i+1)h}^{ih, \bar{X}_i^h}) \\ &= E \left[ u(ih, \bar{X}_i^h) + \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{\partial u}{\partial x} \sigma(t, X_t^{ih, \bar{X}_i^h}) dW_t + \int_{ih}^{(i+1)h} Lu(t, X_t^{ih, \bar{X}_i^h}) dt \right] \end{aligned}$$

Nous calculons l'espérance de calculs  $u(ih, \bar{X}_i^h)$ . L'intégrale stochastique égal à 0. Il reste à estimer

$$E \left[ \int_{ih}^{(i+1)h} Lu(t, X_t^{ih, \bar{X}_i^h}) dt \mid \bar{X}_i^h \right] = \frac{1}{n} Lu(ih, \bar{X}_i^h) + \int_{ih}^{(i+1)h} \int_0^t L^2 u(s, X_s^{ih, \bar{X}_i^h}) ds dt$$

$$E(u(ih, \bar{X}_i^h) - E(u((i+1)h, \bar{X}_i^h))) = \frac{Lu(ih, \bar{X}_i^h)}{n} + \frac{L^2 u(ih, \bar{X}_i^h)}{2n^2} + \text{const } n^{-3} \text{ où}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{n} Lf(x) + \frac{1}{2n^2} L^2 f(x) &= x + \frac{1}{n} \left( V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d V_i^2 \right) f(x) \\ &+ \frac{1}{2n^2} \left( V_0^2 + \frac{1}{2} V_0 \sum_{i=1}^d V_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d V_i^2 V_0 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^d V_i^2 V_j^2 \right) f(x) \end{aligned}$$

Ensuite nous appliquons l'approximation de Taylor des équation différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} &E \left[ f \left( \exp \left( \frac{V_0}{2n} \right) \exp \left( \frac{Z_k^1 V_1}{\sqrt{n}} \right) \dots \exp \left( \frac{Z_k^d V_d}{\sqrt{n}} \right) \exp \left( \frac{V_0}{2n} \right) (x) \right) \right] \\ &- \left[ x + \frac{1}{n} \left( V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d V_i^2 \right) f(x) + \frac{1}{2n^2} \left( V_0^2 + \frac{1}{2} V_0 \sum_{i=1}^d V_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d V_i^2 V_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d V_i^4 + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^d V_i^2 V_j^2 \right) f(x) \right] = \text{const } n^{-3} \\ &E \left[ f \left( \exp \left( \frac{V_0}{2n} \right) \exp \left( \frac{Z_k^d V_d}{\sqrt{n}} \right) \dots \exp \left( \frac{Z_k^1 V_1}{\sqrt{n}} \right) \exp \left( \frac{V_0}{2n} \right) (x) \right) \right] \\ &- \left[ x + \frac{1}{n} \left( V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d V_i^2 \right) f(x) + \frac{1}{2n^2} \left( V_0^2 + \frac{1}{2} V_0 \sum_{i=1}^d V_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d V_i^2 V_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d V_i^4 + \frac{1}{2} \sum_{i > j}^d V_i^2 V_j^2 \right) f(x) \right] = \text{const } n^{-3} \text{ Alors ce terme est borné par} \end{aligned}$$

$const\ n^{-3}$ , d'où nous déduisons que le schéma de Ninomiya et Victoir a l'ordre  $n^{-2}$ .

### Remarques

1. Ce schéma a le même ordre que le schéma de Milshtein. Mais ici nous ne devons pas calculer l'intégrale mixée. Schéma de Ninomiya-Victoir est donc plus commode en pratique que celui de Milshtein.
2. En général il n'est pas possible d'obtenir la formule exacte pour  $\exp(sV_i)$ . La solution de  $\exp(sV_i)$  est trouvée par la méthode de Runge-Kutta. Même dans ce cas on peut utiliser cet algorithme.
3. Ce schéma est appliqué aux modèles des mouvements browniens indépendants.

## 4 Méthode de réduction de variance

### 4.1 Modèle de Heston et l'option asiatique

Nous avons appliqué le schéma d'Euler et le schéma de Ninomiya et Victoir au modèle de Heston qui est décrit ci-dessous :

Le prix de l'actif  $Y_1$  est déterminé par

$$dY_1 = \mu Y_1 dt + Y_1 \sqrt{Y_2} dW_t^1 \quad Y_1(0) = x_0 \quad (42)$$

$$dY_2 = \alpha(\theta - Y_2)dt + \beta \sqrt{Y_2} dW_t^2 \quad Y_2(0) = y_0 \quad (43)$$

où  $(W_t^1, W_t^2)$  est mouvement brownien deux-dimensionnel ayant le coefficient de corrélation  $\rho$  :  $dW_1 dW_2 = \rho$

$\alpha, \theta, \mu$  sont les constantes positives telles que  $2\alpha\theta - \beta^2 > 0$  pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de notre équation. Aussi  $\alpha$  s'appelle *mean reversion*,  $\beta$  - *volatility of volatility*,  $\mu$ - *annual interest rate*, et  $\theta$  *log-run variance*.

Nous avons voulu l'option asiatique dont payoff valorise  $(Y_3(T)/T - K)^+$  où

$$dY_3 = Y_1 dt, \quad Y_3(0) = 0 \quad (44)$$

Pour ce modèle nous avons obtenu une erreur assez grande de Monte-Carlo. Il est possible de la diminuer en utilisant la méthode de réduction de variance

## 4.2 Variable du contrôle

La méthode des variables du contrôle est une des techniques les plus efficaces et le plus largement applicable pour l'amélioration de la méthode de Monte-Carlo. Il consiste à utiliser l'information sur l'erreur d'estimation de la variable connu pour diminuer l'erreur d'estimation de la variable inconnu.

Soient  $Y_1, \dots, Y_n$  les résultats de  $n$  simulations supposés indépendantes et de la même distribution. Pour estimer  $E(Y_i)$  on utilise souvent  $\bar{Y} = (Y_1 + \dots + Y_n)/n$ . Cet estimateur est sans biais et tend vers  $E[Y_i]$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Supposons que chaque fois en calculant  $Y_i$  nous obtenons aussi  $X_i$ , que les couples  $(X_i, Y_i)$  sont indépendantes et de la même distribution et que l'espérance  $E[X]$  de  $X_i$  est connue. Alors pour  $b$  fixé nous pouvons calculer

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - E[X]) \quad (45)$$

Ensuite nous obtenons la moyenne

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - E[X]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b(X_i - E[X])) \quad (46)$$

C'est l'estimateur de la variable du contrôle. L'erreur trouvée de  $\bar{X} - E[X]$  permet d'améliorer l'estimation de  $E[Y]$ .

L'estimateur donné par (46) est sans biais parce que

$$E[\bar{Y}(b)] = E[\bar{Y} - b(\bar{X} - E[X])] = E[\bar{Y}] = E[Y]$$

Il est également convergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b(X_i - E[X])) = E[Y - b(X - E[X])] = E[Y]$$

Chaque  $Y_i(b)$  a la variance

$$Var[Y_i(b)] = Var[Y_i - b(X_i - E[X])] = Var[Y] - 2bCov[X, Y] + b^2Var[X] \quad (47)$$

L'estimateur de la variable du contrôle a donc une variance plus petite que l'estimateur ordinaire si  $b^2Var[X] < 2bCov[X, Y]$ . Le coefficient  $b^*$  optimal minimisant (47) est donné par

$$b^* = \frac{Cov[X, Y]}{Var[X]} \quad (48)$$

$$Var[Y_i(b^*)] = Var[Y] - \frac{Cov^2[X, Y]}{Var[X]} = Var[Y](1 - \rho_{XY}^2) \quad (49)$$

où  $\rho_{XY}$  est le coefficient de corrélation entre  $X$  et  $Y$ . L'efficacité de la variable du contrôle est alors mesurée par le coefficient de corrélation qui doit être aussi proche de 1 que possible.

### Remarque

1. En pratique nous ne connaissons pas  $Cov[X, Y]$ , mais nous pouvons utiliser l'estimateur pour  $b^*$ .

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right)}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2} \quad (50)$$

2. A la fin pour approcher  $E[Y]$  nous utilisons  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(b)$  qui est

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - bX_i + bE[X]) = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right) - \frac{\bar{b}}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) + \bar{b}E[X] \quad (51)$$

La variance de cette valeur est

$$\frac{1}{n} \left( Var[Y] - \frac{Cov^2[X, Y]}{Var[X]} \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right)^2}{n} + \frac{1}{n} \frac{\left( \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \cdot \sum_{i=1}^n Y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2} \right)$$

## 4.3 Application au modèle de Heston

Nous voudrions construire une variable du contrôle pour l'option asiatique. Pour cela on va remplacer la volatilité stochastique dans l'équation (42) par une volatilité déterministe, solution de l'équation (43). Cette solution est donnée par  $\tilde{Y}_2(t) = e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta$ . La variable de contrôle sera donnée par

$$\left( e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(Y_4) dt} - K \right)^+ \quad (52)$$

où

$$dY_4 = \mu Y_4 dt + Y_4 \sqrt{e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta} dW_t^1 \quad Y_4(0) = x_0$$

$$dY_5 = \ln Y_4 dt \quad Y_5(0) = 0$$

Ici pour  $Y_4$  nous utilisons la même trajectoire du mouvement brownien  $W_t$  que pour  $Y_1$ . Autrement dit  $Y_4 = Y_1$  quand  $\beta = 0$ .

La sous-section suivante détaille le calcul de l'espérance de la variable de contrôle.

#### 4.3.1 L'espérance de la variable du contrôle

$$\begin{aligned} Y_4 &= x_0 e^{\int_0^t \mu ds + \int_0^t \sqrt{e^{-\alpha s}(y_0 - \theta) + \theta} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (e^{-\alpha s}(y_0 - \theta) + \theta) ds} \\ &= x_0 e^{\mu t - \frac{1}{2} \theta t + \frac{y_0 - \theta}{2\alpha} (e^{-\alpha t} - 1) + \int_0^t \sqrt{e^{-\alpha s}(y_0 - \theta) + \theta} dW_s} \\ \ln Y_4 &= \ln x_0 + t(\mu - \frac{1}{2} \theta) + \frac{y_0 - \theta}{2\alpha} (e^{-\alpha t} - 1) + \int_0^t \sqrt{e^{-\alpha s}(y_0 - \theta) + \theta} dW_s \\ \int_0^T \ln Y_4 dt &= T \ln x_0 + \frac{T^2}{2} (\mu - \frac{1}{2} \theta) - \frac{y_0 - \theta}{2\alpha} T - \frac{y_0 - \theta}{2\alpha^2} (e^{-\alpha T} - 1) + \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t \sqrt{e^{-\alpha s}(y_0 - \theta) + \theta} dW_s dt \end{aligned}$$

Soit  $f(s) = \sqrt{e^{-\alpha s}(y_0 - \theta) + \theta}$ . On va calculer l'intégrale multiple  $I = \int_0^T \int_0^t f(s) dW_s dt$ . Nous appliquons deux fois la formule d'intégration par parties.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T W_t f(t) dt - \int_0^T \int_0^t f'(s) W_s ds dt = \int_0^T W_t f(t) dt - \int_0^T (T - t) f'(t) W_t dt \\ &= \int_0^T W_t (f(t) - (T - t) f'(t)) dt = \int_0^T (T - t) f(t) dW_t \end{aligned}$$

Alors  $I$  est une variable aléatoire gaussienne  $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ .

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_0^T (T - t)^2 f^2(t) dt = \int_0^T (T - t)^2 (e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta) dt \\ &= -\theta \left. \frac{(T-t)^3}{3} \right|_0^T - \frac{(y_0 - \theta)}{\alpha} e^{-\alpha t} (T - t)^2 \Big|_0^T - \frac{2(y_0 - \theta)}{\alpha} \int_0^T e^{-\alpha t} (T - t) dt \\ &= \frac{\theta T^3}{3} + \frac{(y_0 - \theta)}{\alpha} T^2 - \frac{2(y_0 - \theta)}{\alpha} \left[ \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} (T - t) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} dt \right] \\ &= \frac{\theta T^3}{3} + \frac{2(y_0 - \theta)}{\alpha} \left[ \frac{T^2}{2} - \frac{T}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha T} - 1) \right] \end{aligned}$$

Alors  $Z = e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln X_t dt} = x_0 e^{a + \frac{1}{T} \xi}$  où  $a = \frac{T}{2}(\mu - \frac{1}{2}\theta) - \frac{y_0 - \theta}{2\alpha} - \frac{y_0 - \theta}{2\alpha^2 T}(e^{-\alpha T} - 1)$ .  
Il reste à calculer l'espérance de  $(Z - K)^+$ .

$$\begin{aligned}
E(x_0 e^{a + \frac{1}{T} \xi} - K)^+ &= x_0 e^a E(e^{\frac{1}{T} \xi} - \frac{K}{x_0} e^{-a}) 1_{\{e^{\frac{1}{T} \xi} > \frac{K}{x_0} e^{-a}\}} \\
&= x_0 e^a \int_{T(\ln \frac{K}{x_0} - a)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (e^{\frac{x}{T}} - \frac{K}{x_0} e^{-a}) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= x_0 e^a \int_{\frac{T}{\sigma}(\ln \frac{K}{x_0} - a)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{\frac{\sigma y}{T}} - \frac{K}{x_0} e^{-a}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= x_0 e^a \int_{\frac{T}{\sigma}(\ln \frac{K}{x_0} - a)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\sigma^2 y^2}{2T^2}} e^{-\frac{y^2 - 2\frac{\sigma}{T}y + \frac{\sigma^2}{T^2}}{2}} dy - KN(\frac{T}{\sigma}(\ln \frac{K}{x_0} - a)) \\
&= x_0 e^{a + \frac{\sigma^2}{2T^2}} N(\frac{T}{\sigma}(\ln \frac{K}{x_0} - a) - \frac{\sigma}{T}) - KN(\frac{T}{\sigma}(\ln \frac{K}{x_0} - a))
\end{aligned}$$

#### 4.3.2 Les fonctions utilisées dans le schéma d'Euler et le schéma de Ninomiya et Victoir

Pour le schéma d'Euler (4) nous décrivons les fonctions  $b(Y, t)$ ,  $\sigma(Y, t)$  comme

$$\begin{aligned}
Y &= (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)^t \\
b(Y, t) &= (\mu Y_1, \alpha(\theta - Y_2), Y_1, \mu Y_4, \ln Y_4)^t, \\
\sigma(Y, t) &= \begin{pmatrix} Y_1 \sqrt{Y_2} & 0 \\ 0 & \beta \sqrt{Y_2} \\ 0 & 0 \\ Y_4 \sqrt{e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour le schéma de Ninomiya et Victoir (39) nous avons les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
V_1(Y) &= (Y_1 \sqrt{Y_2}, 0, 0, Y_4 \sqrt{e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta}, 0)^t \\
\exp(sV_1)(Y) &= (X_1, Y_2, Y_3, X_4, Y_5)^t
\end{aligned}$$

où  $X_1$  et  $X_4$  viennent des équations

$$\frac{dX_1}{dt} = sX_1 \sqrt{Y_2}; \quad \frac{dX_4}{X_1} = s\sqrt{Y_2} dt; \quad X_1 = X_1(0) e^{s\sqrt{Y_2}t} \Big|_{t=1}, \quad X_1(0) = Y_1$$

$$X_1 = Y_1 e^{s\sqrt{Y_2}}$$

$$\frac{dX_4}{dt} = sX_4\sqrt{e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta} ; \quad \frac{dX_4}{X_4} = s\sqrt{e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta}dt$$

$$X_4 = \begin{cases} Y_4 e^{\frac{s}{\alpha}(2(b-a)+\sqrt{\theta}\ln\frac{(b-\sqrt{\theta})(a+\sqrt{\theta})}{(b+\sqrt{\theta})(a-\sqrt{\theta})})} & \text{si } y_0 \neq \theta \\ Y_4 e^{s\sqrt{\theta}} & \text{si } y_0 = \theta \end{cases}$$

$$a = \sqrt{e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta}, \quad b = \sqrt{y_0}$$

$$\begin{aligned} V_2(Y) &= (0, \beta\sqrt{Y_2}, 0, 0, 0)^t \\ \exp(sV_2)(Y) &= (Y_1, \left(\frac{\beta s}{2} + \sqrt{Y_2}\right)^2, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0(Y) &= (Y_1(\mu - \frac{1}{2}Y_2), \alpha(\theta - Y_2) - \frac{\beta^2}{4}, Y_1, Y_4(\mu - \frac{e^{-\alpha t}(y_0 - \theta) + \theta}{2}), \ln Y_4)^t \\ \exp(sV_0)(Y) &= (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= Y_1 \exp\left((\mu - \frac{J}{2})s + \frac{Y_2 - J}{2\alpha}(e^{-\alpha s} - 1)\right) \\ X_2 &= J + (Y_2 - J)e^{-\alpha s} \\ X_3 &= \begin{cases} Y_3 + Y_1 \frac{e^{As} - 1}{A} + O(s^3) & \text{si } Y_2 \neq 2\mu \\ Y_3 + Y_1 s & \text{si } Y_2 = 2\mu \end{cases} \\ X_4 &= Y_4 \exp\left(s(\mu - \frac{\theta}{2}) + \frac{s(y_0 - \theta)}{2\alpha}(e^{-\alpha} - 1)\right) \\ X_5 &= \begin{cases} Y_5 & \text{si } Y_4 = 0 \\ Y_5 + s \ln X_4 - \frac{s^2}{2}\left(\frac{y_0 - \theta}{\alpha}(1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}) - \mu + \frac{1}{2}\theta\right) & \text{si } Y_4 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$J = \theta - \frac{\beta^2}{4\alpha}, \quad A = \mu - \frac{Y_2}{2}$$

Nous approchons

$$X_1(t) = Y_1 e^{(\mu - J/2)st + \frac{Y_2 - J}{2\alpha}(e^{-s\alpha t} - 1)} \approx Y_1 e^{(\mu - J/2)st + \frac{Y_2 - J}{2\alpha}(-s\alpha t)} = Y_1 e^{st(\mu - Y_2/2)}$$

pour ensuite calculer  $X_3$

## 5 Les résultats numériques

Toutes les figures se trouvent à la fin de chaque sous-section.

### 5.1 Modèle de Black et Scholes

Les paramètres sont suivants

$$b = 0.1$$

$$\sigma = 0.4$$

$$K = e^{0.1}$$

$$T = 1$$

$$x_0 = 1$$

Le nombre des trajectoires dans la méthode de Monte Carlo est 1 000 000.

Nous divisons l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  parties où  $n$  change de 1 à 30. Nous traçons les dépendances des résultats différents de  $n$ . Nous avons trois fonction d'objectif pour lesquelles nous construisons les figures.

### 5.1.1 Fonction d'objectif $x^2$

Nous avons les estimations de l'erreur différents pour le schéma d'Euler, pour l'extrapolation et pour le schéma de Ninomiya et Victoir (voir figure 3).

Erreur de Monte Carlo est moins 0.005 mais elle n'est pas toujours petite par rapport à l'erreur du schéma (voir figure 4).

Par théorème 2 l'erreur du schéma d'Euler est l'ordre  $O(n^{-1})$ . La figure 5 le montre.

Nous présentons aussi les résultats précédentes en comparaison des ceux obtenus par changement la variable gaussienne à la variable de Bernoulli dans les schémas différentes (voir figures 6 et 7).

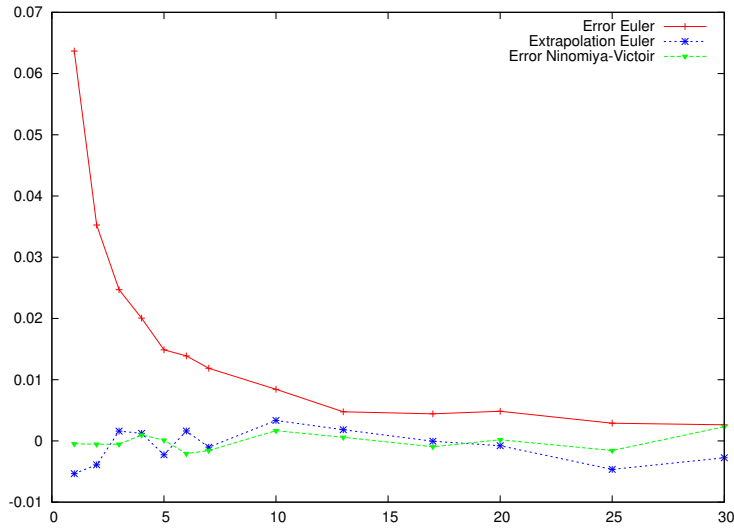


FIG. 3 – Erreur des schémas différents.

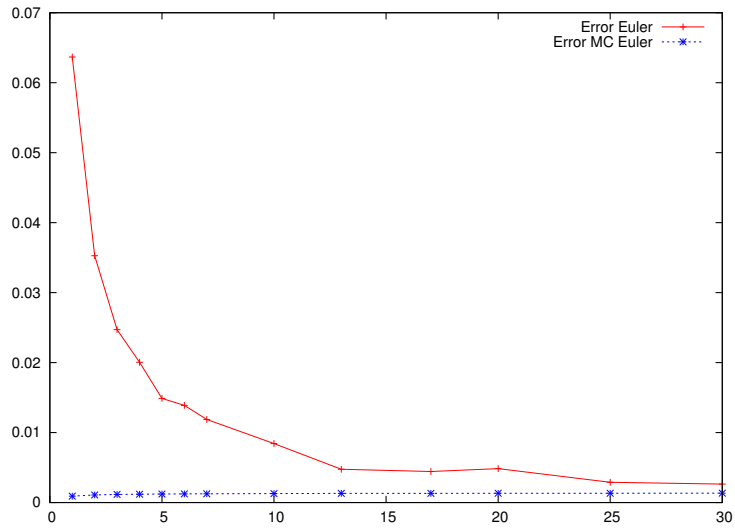


FIG. 4 – Schéma d'Euler

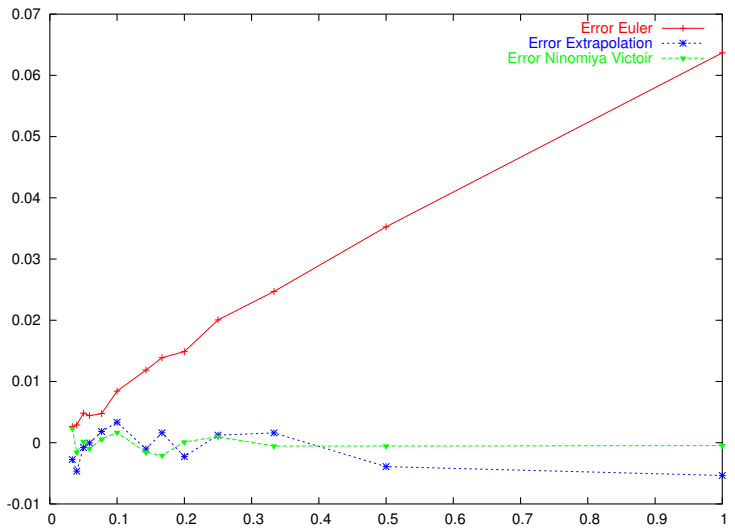


FIG. 5 – Ordre des schémas. La dépendance de l'erreur de  $\frac{1}{n}$

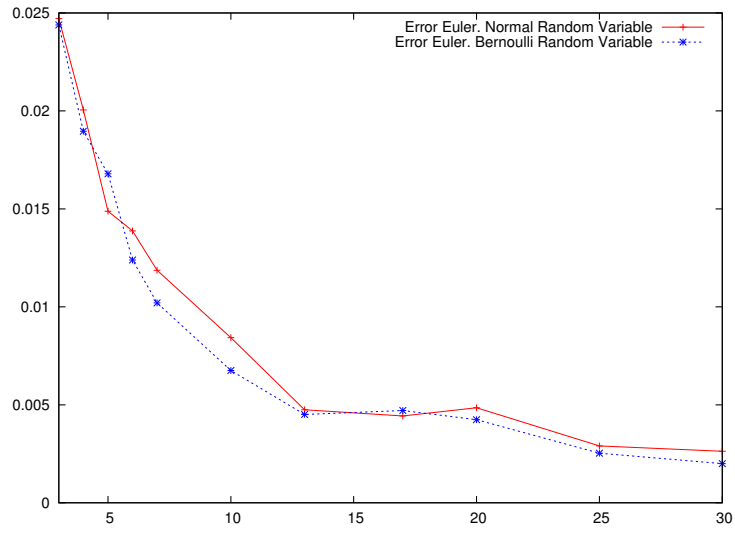


FIG. 6 – Erreur du schéma d'Euler

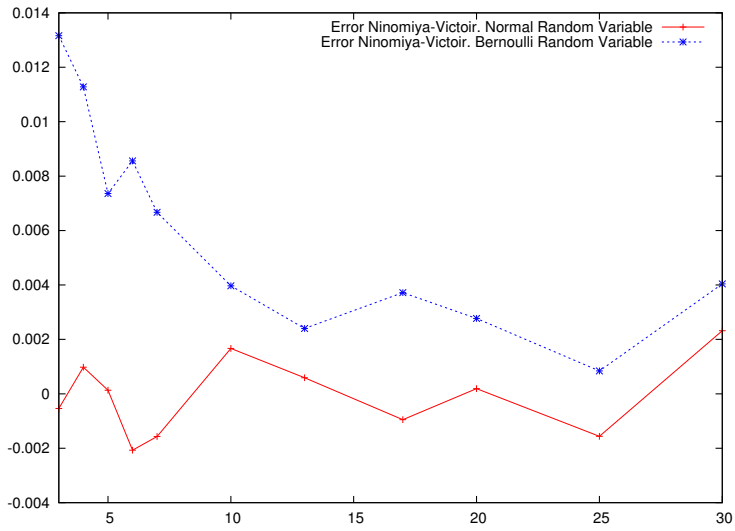


FIG. 7 – Erreur du schéma de Ninomiya et Victoir

### 5.1.2 Fonction d'objectif $1_{\{(x-K)^+\}}$

Nous avons les estimations de l'erreur différents pour le schéma d'Euler, pour l'extrapolation et pour le schéma de Ninomiya et Victoir (voir figure 8).

Erreur de Monte Carlo est moins 0.005 et elle est petite par rapport à l'erreur du schéma (voir figure 9).

Par théorème 2 l'erreur du schéma d'Euler est l'ordre  $O(n^{-1})$ . La figure 10 le montre.

Nous présentons aussi les résultats précédentes en comparaison des ceux obtenus par changement la variable gaussienne à la variable de Bernoulli dans les schémas différents (voir figures 11 et 12).

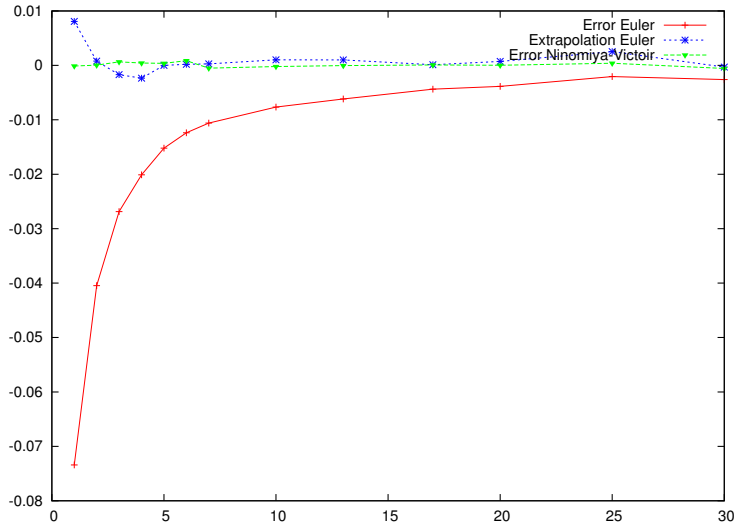


FIG. 8 – Erreur des schémas différents

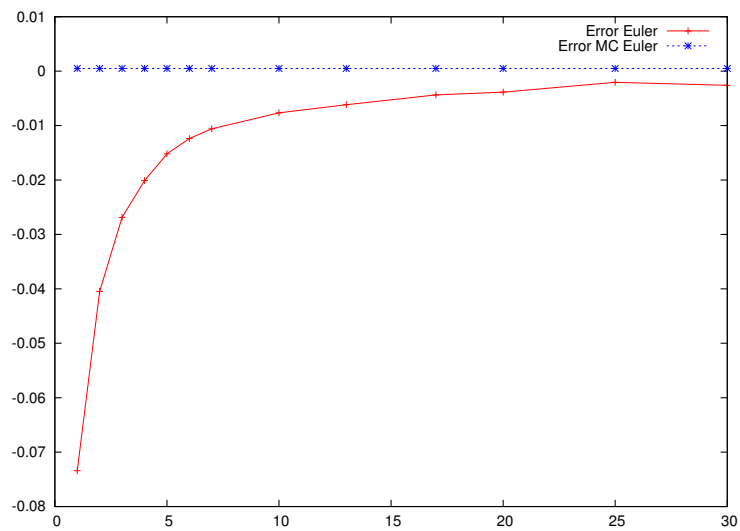


FIG. 9 – Schéma d'Euler

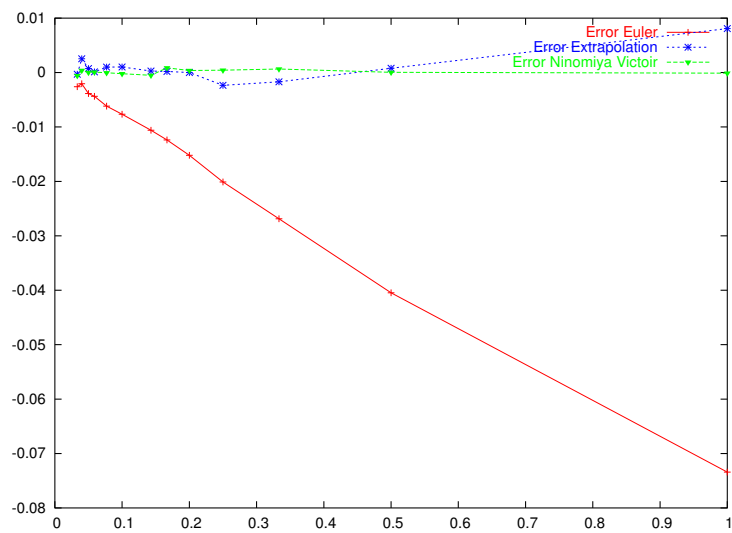


FIG. 10 – Ordre des schémas. La dépendance de l'erreur de  $\frac{1}{n}$

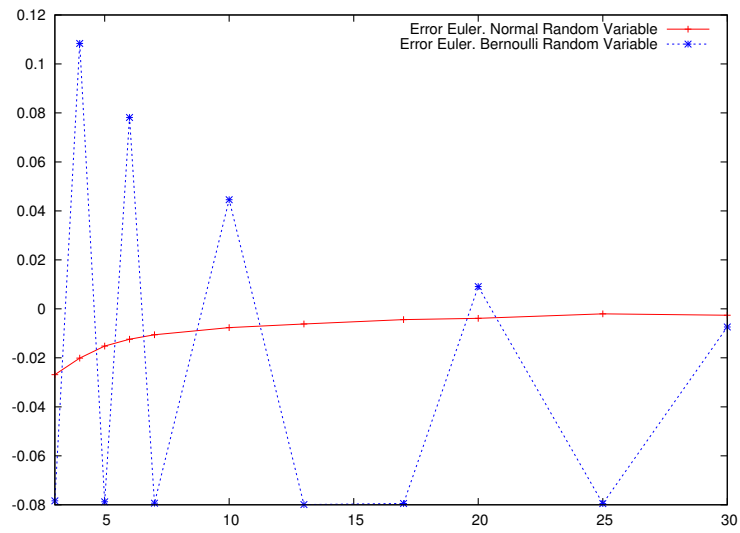


FIG. 11 – Erreur du schéma d'Euler

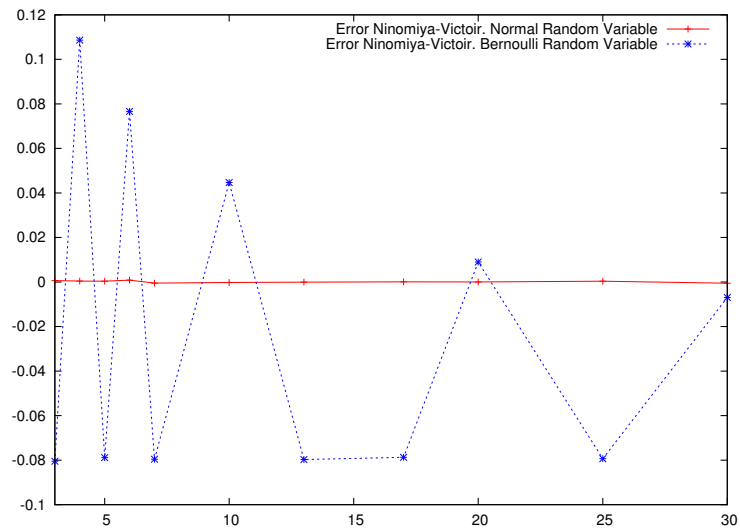


FIG. 12 – Erreur du schéma de Ninomiya et Victoir

### 5.1.3 Fonction d'objectif $(x - K)^+$

Nous avons les estimations de l'erreur différents pour le schéma d'Euler, pour l'extrapolation et pour le schéma de Ninomiya et Victoir (voir figure 13).

Erreur de Monte Carlo est moins 0.00033 mais elle est plus que l'erreur du schéma à partir de  $n = 15$  (voir figure 14).

Par théorème 2 l'erreur du schéma d'Euler est l'ordre  $O(n^{-1})$ . La figure 15 le montre.

Nous présentons aussi les résultats précédentes en comparaison des ceux obtenus par changement la variable gaussienne à la variable de Bernoulli dans les schémas différents (voir figures 16 et 17).

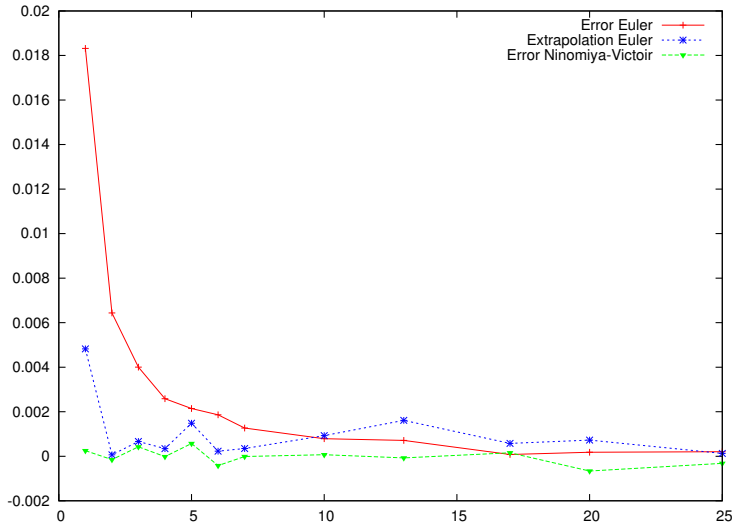


FIG. 13 – Erreur des schémas différents

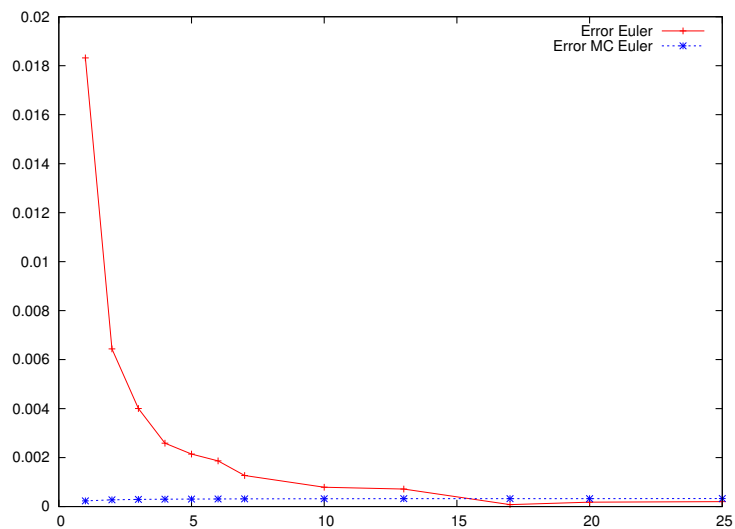


FIG. 14 – Schéma d'Euler

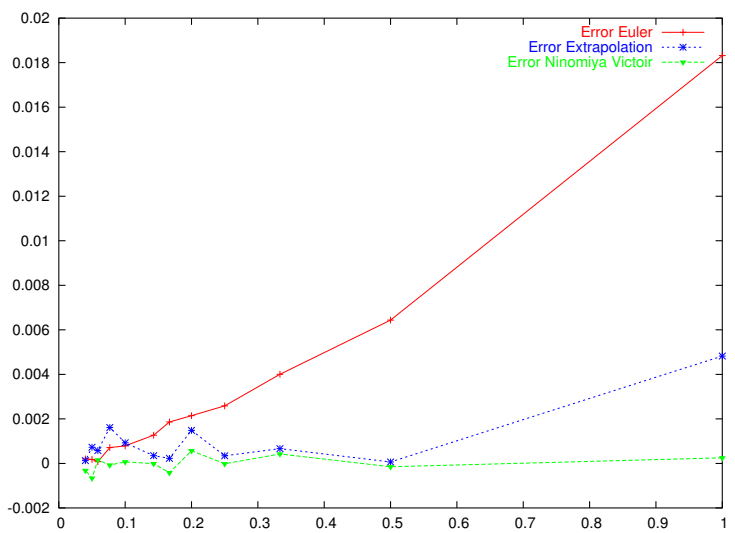


FIG. 15 – Ordre des schémas. La dépendance de l'erreur de  $\frac{1}{n}$

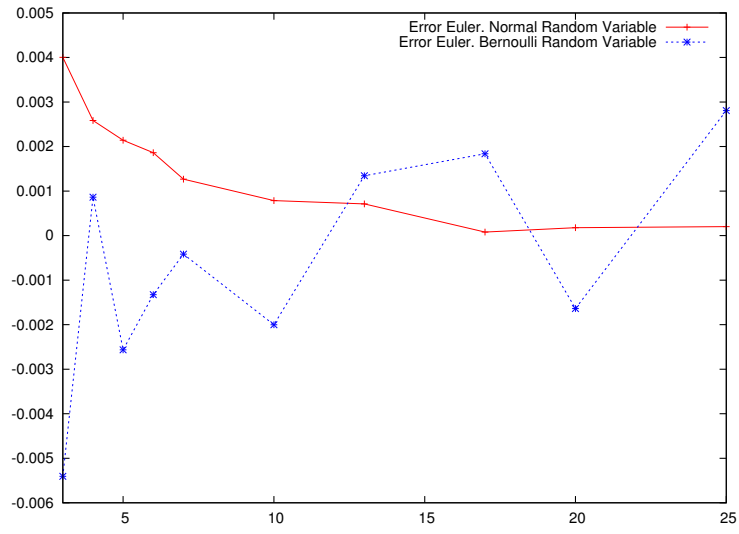


FIG. 16 – Erreur du schéma d'Euler

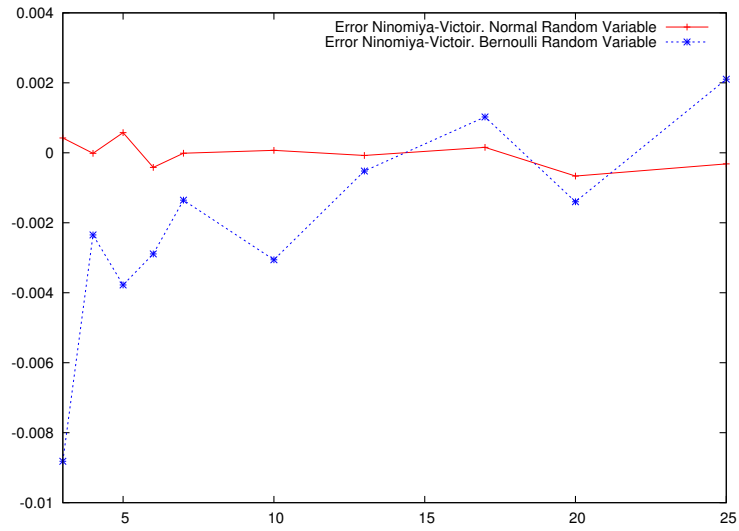


FIG. 17 – Erreur du schéma de Ninomiya et Victoir

## 5.2 Modèle de Heston

Les paramètres sont suivants

$$\alpha = 2.0$$

$$\beta = 0.01, \quad 0.1, \quad 0.5$$

$$\theta = 0.09$$

$$\mu = 0$$

$$K = 1.05$$

$$T = 1$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 0.09$$

Le nombre des trajectoires dans la méthode de Monte Carlo est 1 000 000.

Nous divisons l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  parties où  $n$  change de 2 à 17. Nous traçons les dépendances des résultats différents de  $n$ .

### 5.2.1 L'erreur des schémas

D'abord nous présentons les résultats d'approximation qui sont obtenus par trois schémas quand  $\beta = 0.1$  (voir figure 18).

Nous savons que l'erreur du schéma d'Euler a l'ordre  $O(1/n)$  que nous montrons sur les figures 19 et 20 quand  $\beta = 0.5$ .

L'erreur du schéma de Ninomiya et Victoir a l'ordre  $O(1/n^2)$ . Ci-après nous montrons cette dépendance sur les figures 21 et 22 quand  $\beta = 0.5$ .

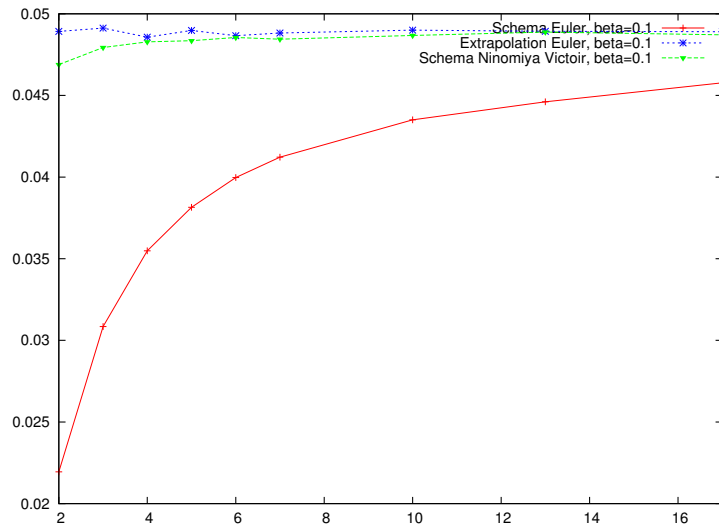


FIG. 18 – Les résultats des schémas différents. Sans l'application de la méthode de réduction de variance

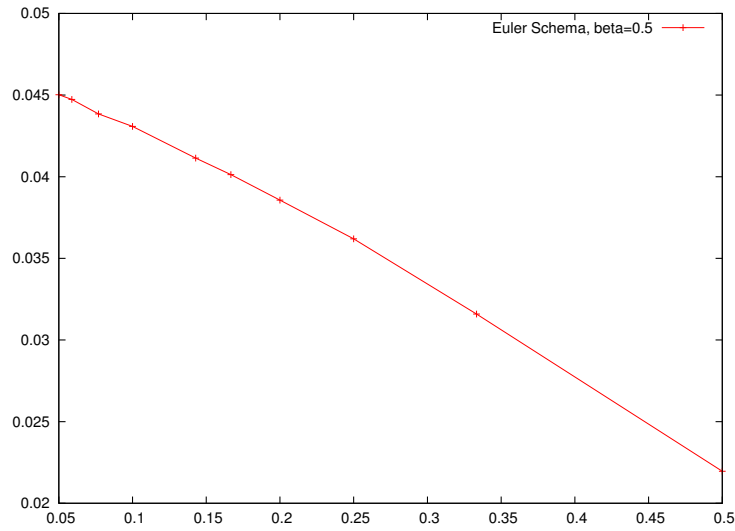


FIG. 19 – Ordre du schéma d'Euler. La dépendance des résultats de  $\frac{1}{n}$ . Sans l'application de la méthode de réduction de variance.

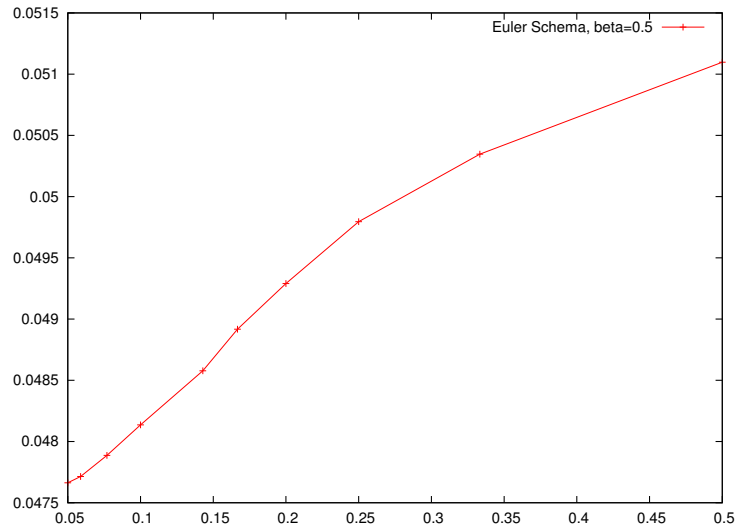


FIG. 20 – Ordre du schéma d'Euler. La dépendance des résultats de  $\frac{1}{n}$ . Avec l'application de la méthode de réduction de variance.

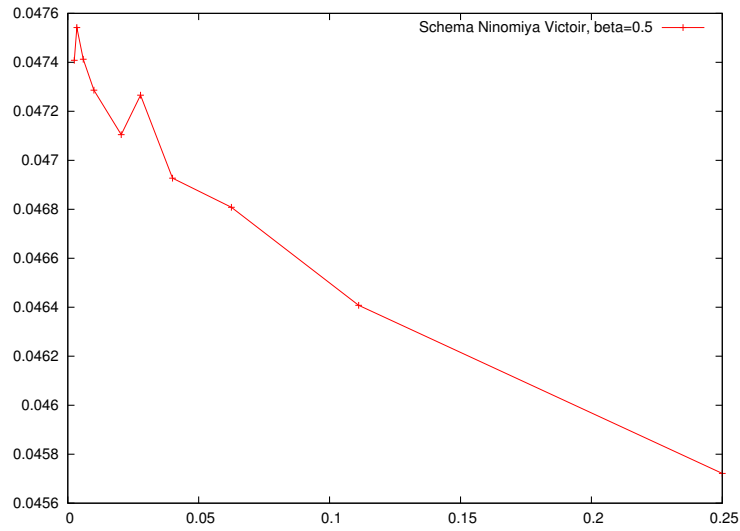


FIG. 21 – Ordre du schéma de Ninomiya et Victoir. La dépendance des résultats de  $\frac{1}{n^2}$ . Sans l'application de la méthode de réduction de variance.

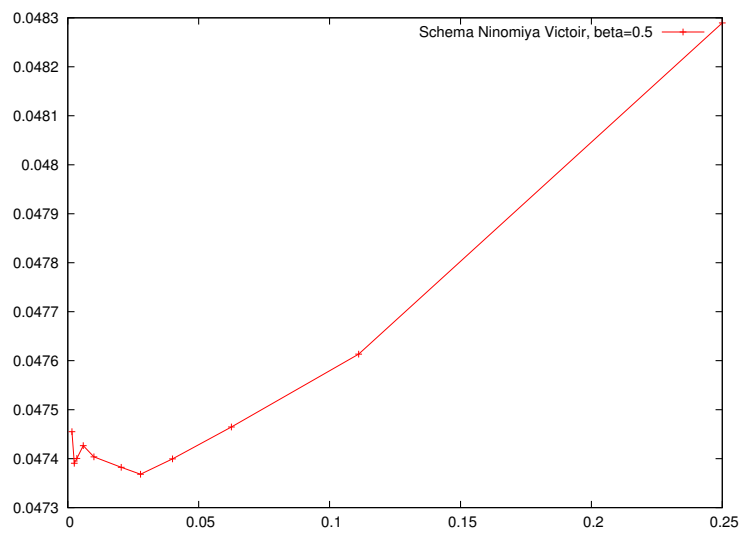


FIG. 22 – Ordre du schéma de Ninomiya et Victoir. La dépendance des résultats de  $\frac{1}{n^2}$ . Avec l'application de la méthode de réduction de variance.

### 5.2.2 La variable de Bernoulli

Dans cette sous-section nous n'utilisons que les résultats obtenu sans l'application de la méthodes de réduction de variance. Nous voulons remplacer la variable gaussienne utilisée dans les schémas à la variable de Bernoulli. Les résultats sont présentés sur les figures 23, 24 et 25.

Encore nous montrons sur la figure 26 que le schéma d'Euler avec la variable de Bernoulli a aussi l'ordre  $O(n^{-1})$ , et schéma de Ninomiya et Victoir a l'ordre  $O(n^{-2})$  (voir figure 27).

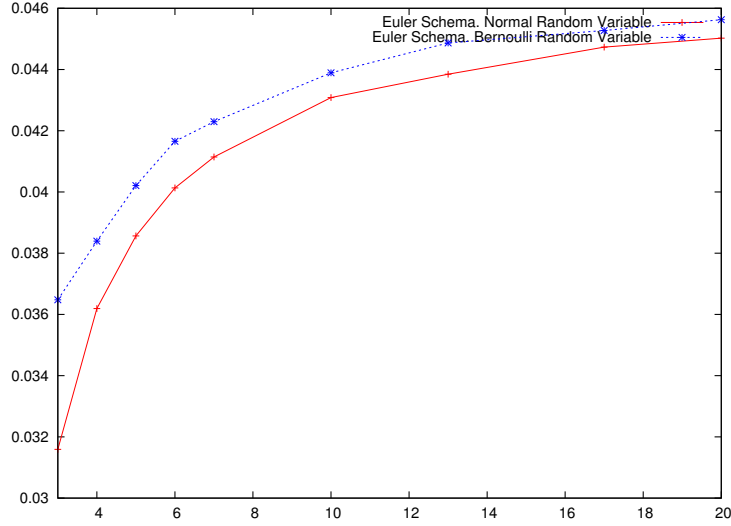


FIG. 23 – Schéma d'Euler,  $\beta = 0.5$

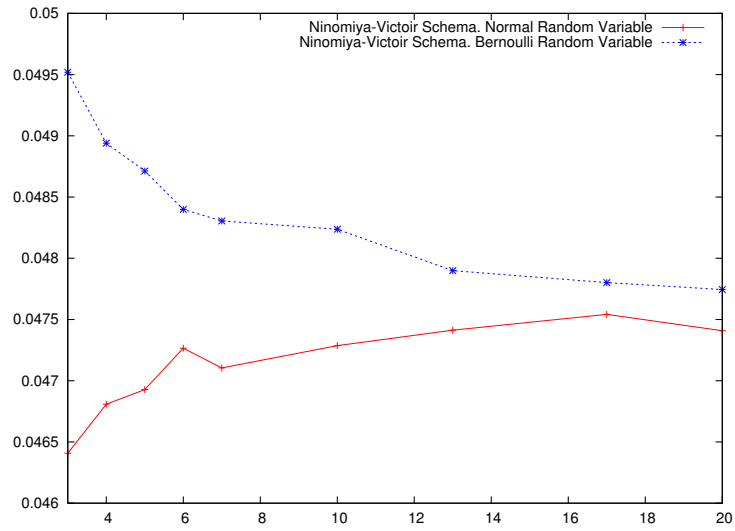


FIG. 24 – Schéma de Ninomiya et Victoir,  $\beta = 0.5$

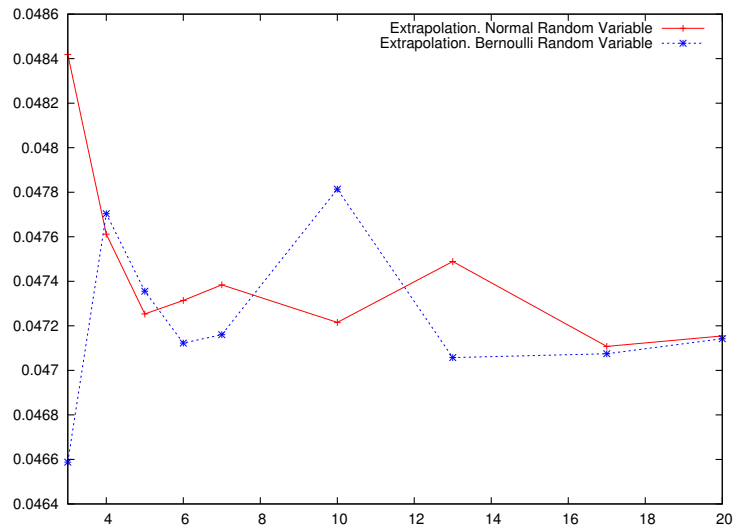


FIG. 25 – Extrapolation,  $\beta = 0.5$

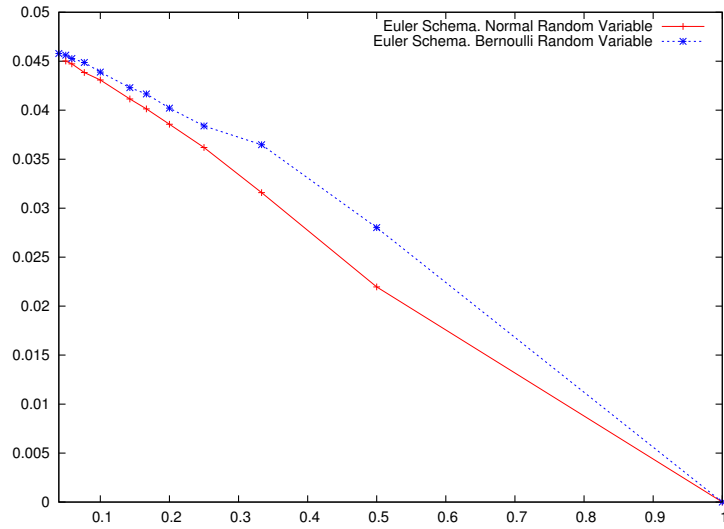


FIG. 26 – Ordre du schéma d'Euler. La dépendance des résultats de  $\frac{1}{n}$ ,  $\beta = 0.5$

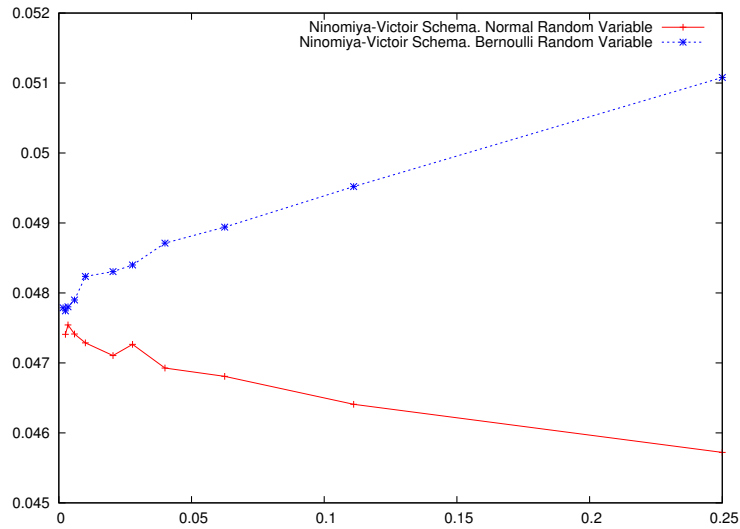


FIG. 27 – Ordre du schéma de Ninomiya et Victoir. La dépendance des résultats de  $\frac{1}{n^2}$ ,  $\beta = 0.5$

### 5.2.3 La méthode de réduction de variance

La méthode de réduction de variance donne le bon résultat si le coefficient de corrélation  $\rho_{X,Y}$  de la formule (49) proche de 1. Dans le modèle de Heston quand  $\beta = 0$ ,  $Y_1 = Y_4$  et ce coefficient égal à 1. Mais si  $\beta$  augmente,  $\rho_{X,Y}$  décroît. Sous nos conditions  $\beta$  doit être plus petit que 0.6 parce que  $(2\alpha\theta - \beta^2 > 0)$ . Nous voulons prendre  $\beta$  différent ( $\beta = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\beta = 0.5$ ) pour regarder si la méthode de réduction de variance est efficace.

Sur les figures 28 et 29 nous présentons les coefficients de corrélation entre la variable du contrôle et la variable que nous estimons.

L'erreur de Monte Carlo pour  $\beta$  différents est aussi différente. On peut l'observer sur les figures 30 et 31

Même si  $\beta = 0.5$  nous obtenons la variance plus petite par rapport à la méthode sans réduction de variance (voir figures 32 et 33).

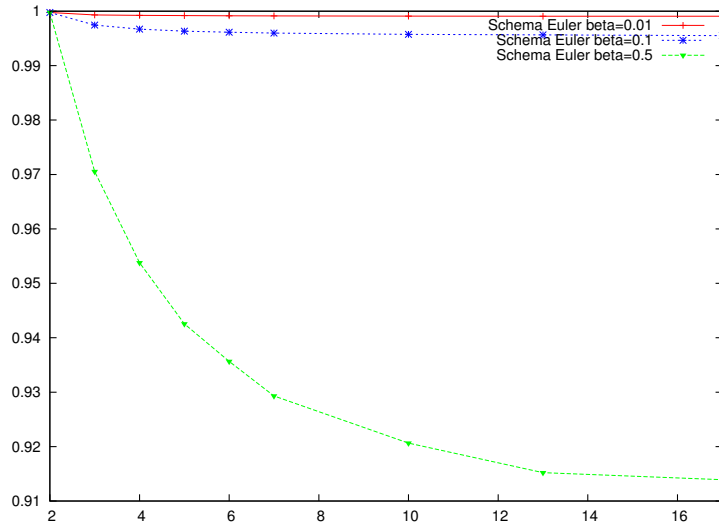


FIG. 28 – Coefficient de corrélation pour le schéma d'Euler

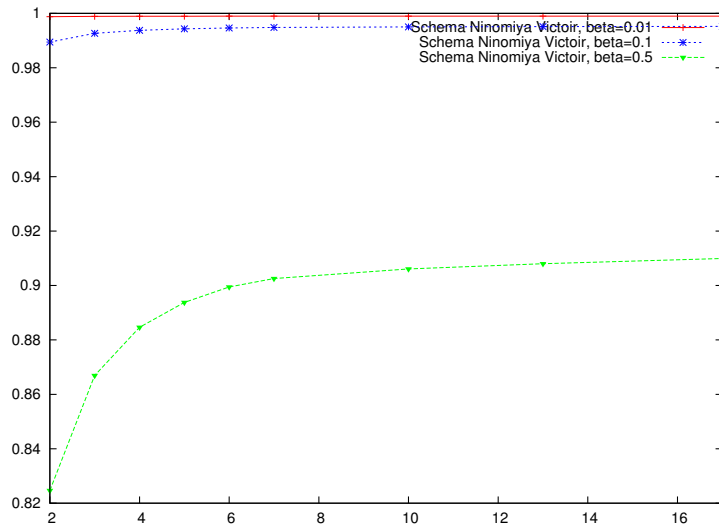


FIG. 29 – Coefficient de corrélation pour le schéma de Ninomiya et Victoir

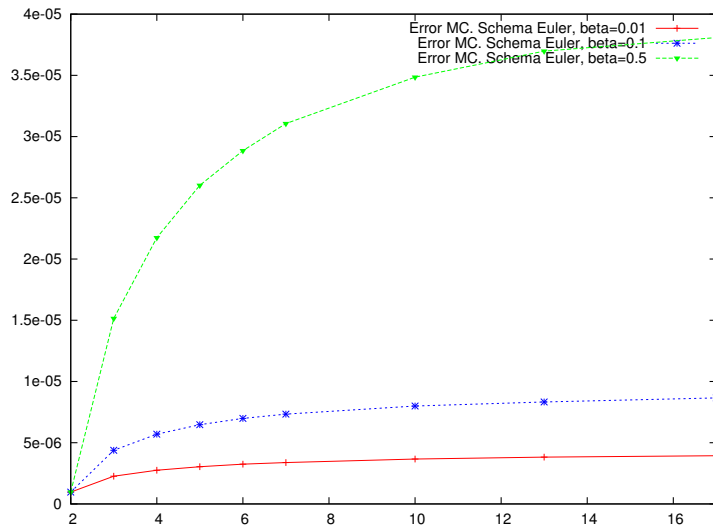


FIG. 30 – Erreur de Monte Carlo pour le schéma d'Euler

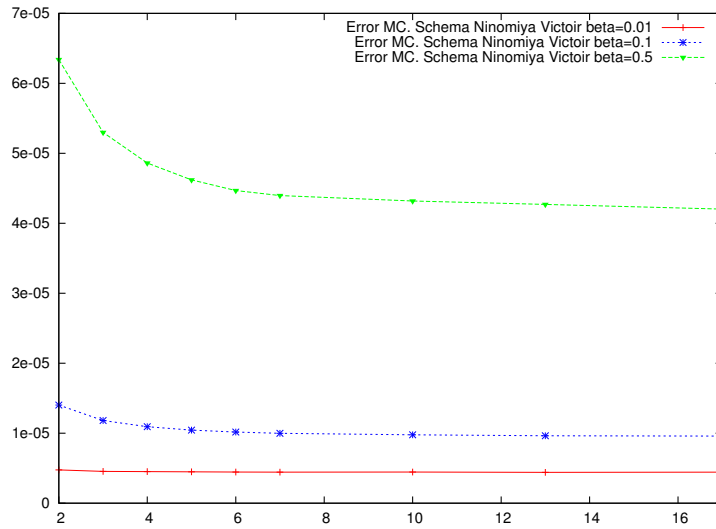


FIG. 31 – Erreur de Monte Carlo pour le schéma de Ninomiya et Victoir

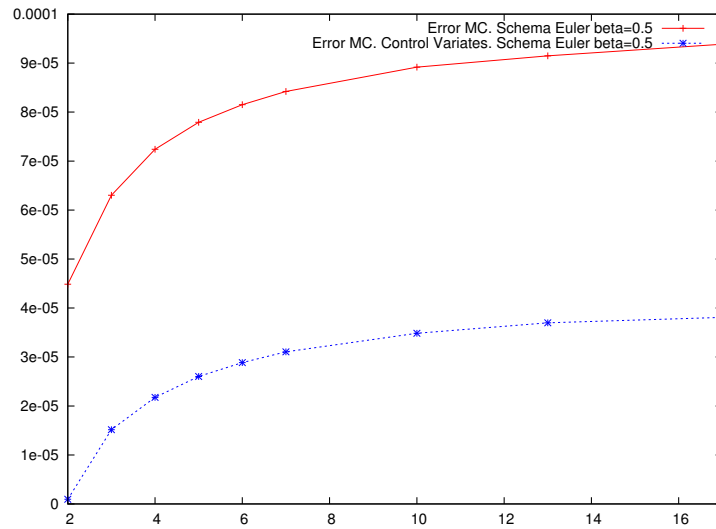


FIG. 32 – La différence des variances pour le schéma d'Euler

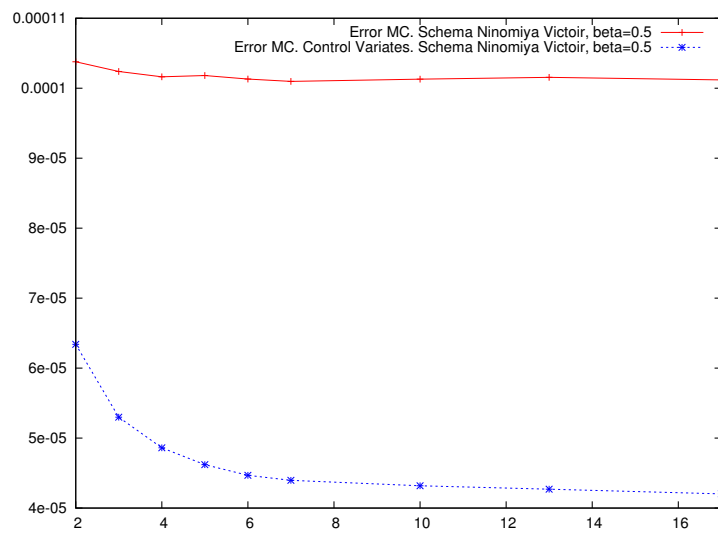


FIG. 33 – La différence des variances pour le schéma de Ninomiya et Victoir

## 6 Appendice. Intégrale de Stratonovich

L'intégral d'Itô  $\int_0^T f(t, \omega) dW_t(\omega)$  pour  $f \in L_T^2$  est égal à la limite des sommes

$$S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j^{(n)}, \omega) \left\{ W_{t_{j+1}^{(n)}}(\omega) - W_{t_j^{(n)}}(\omega) \right\}$$

avec les points de l'évaluation  $\xi_j^{(n)} = t_j^{(n)}$  pour la partition  $0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{n+1}^{(n)} = T$  pour laquelle

$$\delta^{(n)} = \max_{1 \leq j \leq n} (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Il est possible choisir autre point de l'évaluation  $t_j^{(n)} \leq \xi_j^{(n)} \leq t_{j+1}^{(n)}$  qui donne les variables aléatoires différentes dans la limite. Si on prend

$$\xi_j^{(n)} = (1 - \lambda)t_j^{(n)} + \lambda t_{j+1}^{(n)}$$

pour  $0 \leq \lambda \leq 1$  fixé qui donnera la limite dénoté par

$$(\lambda) \int_0^T f(t, \omega) dW_t(\omega)$$

Le cas  $\lambda = 0$  donne l'intégrale d'Itô. Regardons le cas  $0 < \lambda \leq 1$ . Quand la fonction  $f$  est différentiable continue nous appliquons l'expansion de Taylor à la fonction  $f$ .

$$f\left((1 - \lambda)t_j^{(n)} + \lambda t_{j+1}^{(n)}, \omega\right) = (1 - \lambda)f\left(t_j^{(n)}, \omega\right) + \lambda f\left(t_{j+1}^{(n)}, \omega\right) + O\left(|t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}|\right)$$

La somme devient donc

$$\bar{S}_n(\omega) = \sum_{j=1}^n \left( (1 - \lambda)f(t_j^{(n)}, \omega) + \lambda f(t_{j+1}^{(n)}, \omega) \right) \times \left( W_{t_{j+1}^{(n)}}(\omega) - W_{t_j^{(n)}}(\omega) \right)$$

Si  $f(t, \omega) = W_t(\omega)$

$$(\lambda) \int_0^T W_t(\omega) dW_t(\omega) = \frac{1}{2} W_T(\omega)^2 + \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) T$$

Le cas symétrique de cette intégrale (proposé par Stratonovich  $\lambda = \frac{1}{2}$ ) ne contient pas le terme additionnel. Il donne les calculs classiques et est dénoté par

$$\int_0^T f_t \circ dW_t$$

## Références

- [1] Vlad Bally, Denis Talay. *The law of the Euler Scheme for the Stochastic Differential Equations : (I) Convergence Rate of the Distribution Function*. INRIA, Rapport de recherche No 2244, mars 1994.
- [2] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer, 2004.
- [3] Nicole El Karoui, Emmanuel Gobet. *Modèles stochastiques en finance*. Cours de l'Ecole Polytechnique - 3 année, 2004.
- [4] Peter E. Kloeden, Eckhard Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer-Verlag, 1992.
- [5] Hiroshi Kunita. *Ecole d'Ete de probabilités de Saint-Flour XII-1982 : R.M. Dudley, H. Kunita, F. Ledrappier*, Springer, 1984.
- [6] Terry Lyons, Nicolas Victoir. *Cubature on Wiener space*. Proceedings of The Royal Society of London. Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 460 (2004), No 2041, 169–198.
- [7] Syoiti Ninomiya, Nicolas Victoir. *Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing*.
- [8] Denis Talay, Luciano Tubaro. *Expansion of the global error for numerical schemes solving Stochastic Differential Equations*. Stochastic Analysis and Applications, 8(4) :94-120, 1990.