Différences finies pour l'équation de la chaleur

① Pb de Cauchy sur $\mathbb{R}$, schéma explicite

DF principe

f fonction connue en des point $x_j = j\Delta x = jh$, $h \in \mathbb{R}$
régulière.

Approximation de f' $f''(\ldots)$ par des valeurs de $f(x_j) = f_j$

le + simple
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi) \qquad \xi \in (x, x+h) \quad (1)$$
$$= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi) \qquad (2)$$
$$= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \qquad \xi \in (x-h, x+h) \quad (3)$$

la 3e
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_+)$$
$$-\quad f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\xi_-)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{12}\left(f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)\right)$$

si $f \in C^3 \Rightarrow \exists \xi_x$ $f^{(2)}(\xi_x) = \frac{1}{2}\left(f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)\right)$

(1) = DF "avant"
(2) — DF "arrière" — ordre 1
(3) DF centré ordre 2 mais f + régulière

Ce qui se passe en précision limitée.
$$\tilde{f}(x) = f(x)(1 + \varrho(x)) \qquad |\varrho(x)| \leq \varepsilon$$
(pex, ε machine)

$$\left| \frac{\tilde f(x+h) - \tilde f(x)}{h} - f'(x) \right| \le \frac{1}{h}\left(|\tilde f(x+h) - f(x+h)| + |\tilde f(x) - f(x)| \right) + \frac{h}{2} |f''(\xi)|$$

<u>Hyp</u> $|f(x)| \le M_0$, $|f''(x)| \le M_2$ sur l'intervalle et $|\tilde f(x)| \le \varepsilon$

$$\left| \frac{\tilde f(x+h) - \tilde f(x)}{h} - f'(x) \right| \le 2\frac{\varepsilon}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2$$

valeur optimale de h ?

$$\frac{2\varepsilon}{h} M_0 = \frac{h}{2} M_2 \Rightarrow h = 2\sqrt{\varepsilon \frac{M_0}{M_2}}$$

$\boxed{h \sim \sqrt{\varepsilon}}$ et l'erreur est aussi en $\sqrt{\varepsilon}$

+ facteurs M_0, M_2 <u>inconnus</u> mais "qualitativement logique"

<u>Rq</u> si centré majorant $\frac{2\varepsilon}{h} M_0 + \frac{h^2}{6} M_3$ $M_3 = \sup(f''')$

$$h \sim \sqrt[3]{\varepsilon} \Rightarrow + \text{grand}.$$

Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{-f(x+h) + 2f(x) - f(x-h)}{h^2} + h^2 f^{(4)}(\xi)$$

$f \in C^4$

<u>Ordre 4</u>

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 16f(x+h) + 30f(x) - 16f(x-h) + f(x-2h)}{12h^2} + h^4 f^{(6)}(\ )$$

Schéma explicite pour la chaleur sur $\mathbb{R}$

$$\left\| \begin{array}{l} x_j = j\Delta x \quad j\in \mathbb{Z}, \quad t^n = n\Delta t, \quad n\in \mathbb{N} \\ u_j^n \simeq u(x_j, t^n) \end{array}\right.$$

Schéma avant en temps, centré en espace

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D\,\dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \\ u_j^0 = \varphi(x_j) \end{cases}$$

Explicite $\Rightarrow$ $(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$ connu $\Rightarrow$ $(u_j^{n+1})_j$ calculable.

$\cancel{u_j^{n+1} = \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\right)\left(u_{j+1}^n\right)}$ $\quad \lambda = \dfrac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ nbre de Fourier

$$u_j^{n+1} = \lambda u_{j-1}^n + (1-2\lambda) u_j^n + \lambda u_{j+1}^n$$

Rq somme des coeffs $= 1$

Lemme si $0 \leq 1-2\lambda \leq 1 \Rightarrow \forall j \ \max_j |u_j^{n+1}| \leq \max_j |u_j^n|$

Dem $\lambda > 0$, $1-2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1/2$

Si vrai $\Rightarrow$ combinaison convexe $\rightarrow |u_j^{n+1}| \leq \max(|u_{j-1}^n|, |u_j^n|, |u_{j+1}^n|)$

$$\leq \max_j |u_j^n|$$

$\Rightarrow$ ok

$\boxtimes$

PPE DU MAXIMUM DISCRET

$\Rightarrow$ Stabilité du schéma en norme L^∞

Rq Si $\lambda > \frac{1}{2} \Rightarrow$ schéma instable.

Ex $u_j^0 = (-1)^j \varepsilon \Rightarrow u_j^n = (1-4\lambda)^n (-1)^j \varepsilon$

$\Rightarrow \max_j |u_j^n| = (4\lambda - 1)^n \varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Erreur de troncature - consistance

$u(x,t)$ sol de l'EDP, supposée (très) régulière

on substitue u dans le schéma

$$\tau_j^n = \frac{1}{\Delta t}\left(u(x, t+\Delta t) - u(x,t)\right)$$

$$- \frac{D}{\Delta x^2}\left(u(x-\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x, t)\right)$$

Si u régulière, on calcule

$$\tau_j^n = \partial_t u(x,t) + \Delta t\, \partial_t^2 u(x, \theta)$$

$$- D\, \partial_x^2 u(x,t) + \Delta x^2 \partial_x^4 u(\xi, t)$$

Si u sol de l'EDP, l'erreur de troncature τ_j^n est bornée par

$$|\tau_j^n| \leq \Delta t \max_{(x,t)} |\partial_t^2 u| + \Delta x^2 \max_{(x,t)} |\partial_x^4 u|$$

La méthode est dite consistante, ordre 1 en temps,

——— 2 en espace.

<u>Convergence</u> | soit t_f fixé, $D\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$ (stabilité)

| soit $\Delta t \to 0$, avec $n\Delta t = t_f$ ($n \to \infty$, $n\Delta t = t_f$)

$$\max_{j \in \mathbb{Z}} |u(x_j, t_f) - u_j^n| \leq C\, t_f (\Delta t + \Delta x^2)$$

avec $C \leq |\partial_t^2 u|_\infty + |\partial_x^4 u|_\infty$ est temps

<u>Dem</u> soit $e_j^n = u(x_j, t^n) - u_j^n$ $\quad (t^n = t_f)$

Par définition de τ_j^n

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\Delta t} - D\,\frac{e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \tau_j^n$$

Stabilité $\Rightarrow$ $$|e_j^{n+1}| \leq |e_j^n| + \Delta t\, \tau_j^n \quad , \forall j, \forall n$$

soit $E^n = \sup_j |e_j^n|$, $\quad T^n = \sup_j |\tau_j^n|$

$$E^{n+1} \leq E^n + \Delta t\, T^n$$
$$\leq E^{n-1} + \Delta t (T^n + T^{n-1})$$

$$|E^{n+1}| \leq E^0 + \Delta t \sum_{k=0}^{n} T^k$$

$$\leq \cancel{E}0 + \underbrace{n\Delta t}_{``t_f}(\max_k T^k)$$

donc $E^n \leq t_f \max T^k$ donnée dans l'énoncé.

$\blacksquare$

Rq 1 _ Consistance + stabilité $\Rightarrow$ convergence

Rq 2 Besoin de régularité

Schémas aux différences finies pour l'équation de la chaleur

Cas d'un intervalle borné, avec conditions de Dirichlet homogènes

Eq de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = f(x,t) & x \in]0,L[,\ t \in [0,T] \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in]0,L[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Hyp
Solution regulière

→ Maillage de $[0,L]$: $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_j < \dots x_J < x_{J+1} = L$

Dans ce cours $x_j = j\Delta x$, $\Delta x > 0$, $j = 0, \dots, J+1$

→ En temps $t^n = n\Delta t$, $n = 0, \dots, N+1$, $(N+1)\Delta t = T$

Notations u_j^n $(\simeq u(x_j, t^n))$

Cond. limites $u_0^n = u_{J+1}^n = 0$, $\forall n$

Cond initiale $u_j^0 = \varphi(x_j)$ $j = 0, \dots, J+1$ ($\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ $\Rightarrow u_0^0 = u_0^0$!!)

Second membre $f_j^n = f(x_j, t^n)$ $j = 0 \dots J+1$, $n = 0, \dots N+1$

① Généralisation du schéma explicite

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = f_j^n \quad + \text{CL} + \text{CI}$$

⚠ Bords : $\begin{cases} j = 1 \rightarrow \dfrac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} - D\dfrac{u_2^n - 2u_1^n + u_0^n}{\Delta x^2} = f_1^n & \rightarrow \underline{\underline{u_0^n = 0}} \\ j = J \quad \text{idem} \end{cases}$

→ ~~Forme~~ Vision matricielle : vecteur des inconnues

$$U^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ | \\ u_J^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^J$$

<u>sans les bords</u>

Idem $\quad f^n = \begin{pmatrix} f_1^n \\ \vdots \\ f_J^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^J$

⚠ Taille du vecteur inconnu change avec J, ou Δx $\left((J+1)\Delta x = L\right)$

Matrice $\quad A_\Delta = \dfrac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{J \times J}$

Le schéma DF s'écrit $\quad \dfrac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + D A_\Delta U^n = F^n$

Explicite $\Rightarrow \quad \underline{\underline{U^{n+1} = (I - D\Delta t A_\Delta) U^n + \Delta t F^n}}, \quad U^0 = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_J) \end{pmatrix}$

Analyse identique au cas sur R (Dirichlet)

$$\boxed{\text{Stabilité (SSI)} \quad \dfrac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \dfrac{1}{2}}$$

② Autres schémas

Condition de stabilité très restrictive.

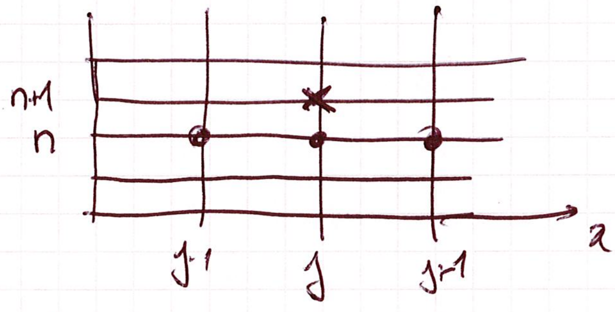
Schéma implicite:

$$\left| \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D \dfrac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = F_j^{n+1} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, J \\ n = 0, \dots, N \end{matrix} \right.$$

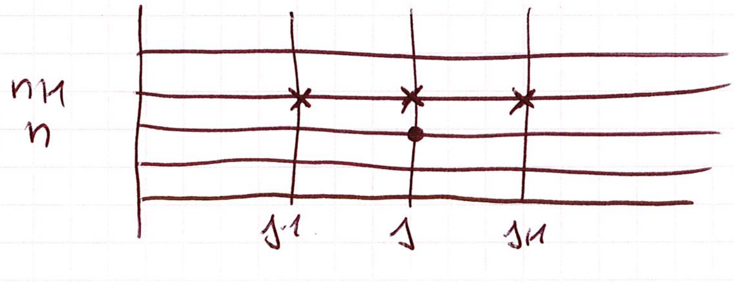
Pas immédiat de calculer u_j^{n+1} ?

Vision "Stencil"

Explicite:



Implicite



Vision matricielle.

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + D A_{\Delta x} U^{n+1} = F^{n+1}, \qquad U^0 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_J \end{pmatrix}$$

système linéaire : $\left(\frac{I}{\Delta t} + D A_{\Delta x}\right) U^{n+1} = \frac{U^n}{\Delta t} + F^{n+1}$

ou $\Rightarrow$ $\left(I + D\Delta t\, A_{\Delta x}\right) U^{n+1} = U^n + \Delta t F^{n+1}$

Mq matrice $I + D\Delta t\, A_{\Delta x}$ inversible ?

(cf + loin, valeurs propres)), symétrique, définie positive

- $A_{\Delta x}$ symétrique (évident
- $A_{\Delta x}$ diagonale strictement dominante $\Leftrightarrow$ $\Rightarrow$ A SPD (??

(R1) Th Gerschgorin $A \in \mathbb{R}^{J\times J}$, soit $\sigma_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$

(λ, x) vp, $\vec{vp}$ de A :
$\exists i$ tq $|\lambda - a_{ii}| \leq \sigma_i$

Dem λ vp, x $\vec{vp}$: $Ax = \lambda x$,
soit i tq $|x_i| \geq |x_j|$, $\forall j$ $(x_i \neq 0)$
$\lambda_i - a_i = -\sum a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \Rightarrow |\lambda - a_i| \leq \sigma_i$

Si A SDD $\Rightarrow$ ~~$\lambda = a_i - \sum a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$~~ rayon du cercle $< a_i \Rightarrow \lambda > 0$
$a_{ii} > 0$
$a_{ij} < 0$

Autres schémas (

* Crank-Nicolson : moyenne des 2 premiers

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - D\,\frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(f_j^n + f_j^{n+1}\right)$$

Implicite :

$$\frac{U^{n+1}-U_n}{\Delta t} + D\,A_\Delta\left(\frac{U^{n+1}+U^{n+1}}{2}\right) = \frac{F^n+F^{n+1}}{2}$$

système linéaire $\left(I + \frac{D\Delta t}{2} A_{\Delta x}\right) U^{n+1} = \left(I - \frac{D\Delta t}{2} A_{\Delta x}\right) U^n + \frac{\Delta t}{2}\left(F^n + F^{n+1}\right)$

* θ schéma (+ général) : $0 \leq \theta \leq 1$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + D\left(\theta\,\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)\,\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right) = \theta f_j^n + (1-\theta) f_j^{n+1}$$

$$\left(I + \theta D\Delta t A_{\Delta x}\right) U^{n+1} = \left(I - (1-\theta)\Delta t A_\Delta\right) U^n + \Delta t\, F^{n+\theta}$$

Notation $F^{n+\theta}$ (ou $U^{n+\theta}$) $= \theta F^{n+1} + (1-\theta) F^n$)

Rq matrice $I + \theta D \Delta t A_{\Delta x}$ toujours SDP, $\theta > 0$,

---

Analyse des schémas : consistance, stabilité, convergence,

Rq Besoin de norme sur $\mathbb{R}^J$

Les plus utilisées $\begin{cases} \|U\|_{\infty,\Delta x} = \max\limits_{1\leq j\leq J} |u_j| \\ \|U\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\Delta x}\left(\sum\limits_{j=1}^{J} |u_j|^2\right)^{1/2} \end{cases}$

Rq $\|U\|_{2,\Delta x} \leq \|U\|_{\infty,\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \|U\|_{2,\Delta x}$

équivalence DEPEND DE J

Schéma DF à 1 pas général :

Sous la forme

$$\left| \; B_1 U^{n+1} = B_0 U^n + \tilde{F}^n, \right. \qquad U^0 \text{ donné}$$

Généralise les schémas précédents

CN B_1 inversible

Pour "ressembler" à l'équation $B_1 = O\left(\frac{1}{\Delta t}\right)$

Hyp B_1 inversible et $\|B_1^{-1}\| \leq C\Delta t$, $\forall \Delta t \leq \Delta t_0$

Convergence

Définition : Schéma convergent (pour une norme $\|\cdot\|_{\Delta x}$) ssi

$$\max_{n\Delta t \leq T} \|U^n - u(\cdot, t^n)\|_{\Delta x} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0 \end{cases}$$

avec une possible condition sur $\Delta x, \Delta t$

Rq : – Norme seulement en espace ! (L^∞ en temps)

– condition par ex $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2D}$ (schéma explicite)

En particulier $U_j^n \longrightarrow u(x_j, t^n)$ si $\begin{matrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta t \to 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} j\Delta x = x^* \\ n\Delta t = t^* \end{matrix}$

Difficile à démontrer : Th Lax $\Rightarrow$ 2 conditions

Consistence

Opérateur d'échantillonage : $E_{\Delta x}$

$$E_{\Delta x} : \left| \begin{array}{ccc} C^0(0,L) & \longrightarrow & \mathbb{R}^J \\ u & \longrightarrow & E_{\Delta x} u = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ | \\ u(x_J) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Erreur de troncature :

$$\varepsilon^n_{\Delta x, \Delta t} = B_1(E_{\Delta x} u^{n+1}) - B_0(E_{\Delta x} u^n) - \tilde{F}^n$$

Schéma consistent ssi $\max_{n\Delta t \le T} \| \varepsilon^n_{\Delta x, \Delta t} \|_{\Delta x} \longrightarrow 0$ si $(\Delta x, \Delta t) \longrightarrow 0$

— ordre p (espace), q temps ssi

$$\max_{n\Delta t \le T} \| \varepsilon^n_{\Delta x, \Delta t} \|_{\Delta x} \le C(\Delta x^p + \Delta t^q) \qquad C = C(u)$$

En pratique très simple : Dev^t Taylor (mais ⚠ au point où on développe).

Exemples : Consistence et ordre des schémas (⚠ compléter), cf Morton-Mayer pp 28-29

⚠ Consistence ⟺ ⚠ quel ordre la solution exacte vérifie-t-elle le schéma.

Une façon de lier le schéma et l'équation EDP.

Stabilité

Schéma ~~homogène~~ :

$$B_1 U^{n+1} = B_0 U^n + \tilde{F}^n \quad U^0 \text{ donné}$$

schéma stable (pour 1 norme $\|.\|_{\Delta x}$) ssi (condition sur $\Delta t, \Delta x$)

$$\exists C(T)>0, \forall U^0, \quad \max_{n\Delta t \leq T} \|U^n\|_{\Delta x} \leq C(T) \|U^0\|_{\Delta x} + C'(T) \max_{n\Delta t \leq T} \|\tilde{F}^n\|$$

$$\Leftrightarrow \exists C(T)>0, \forall U^0 \in \mathbb{R}^{?}, \forall n, n\Delta t \leq T \quad \|U^n\|_{\Delta x} \leq C(T) \|U^0\|_{\Delta x} + C'(T) \max_{n\Delta t \leq T} \|\tilde{F}^n\|$$

La solution reste bornée, sur un intervalle de temps FINI

Ici pas de lien avec l'équation.

Si la solution de l'EDP est bornée on prend en gal $C(T) = 1$

($C(T) > 1$ utile pour solution $\nearrow t$)

DEPEND DE LA NORME.

⚠ Conditions aux limites (pas dans ce cours)

~~Lax Rich~~

Exemple

Schéma explicite, $D \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$

$$\Rightarrow \quad |u_j^{n+1}| \leq \max_j |u_j^n|$$

$$\Rightarrow \quad \|U^{n+1}\|_{\infty, \Delta x} \leq \|U^n\|_{\infty, \Delta x}$$

Stabilité en norme L^∞.

Théorème de Lax (-Richtmyer)

Si le schéma est consistent et stable (pour une norme $\|.\|_{\Delta x}$)
alors il est convergent (pour la même norme)

THÉORÈME FONDAMENTAL

Rq1 Réciproque vraie : si schéma consistent, convergent $\Rightarrow$ stable

Rq2 Indispensable en pratique: convergence difficile,

- consistence $\Rightarrow$ Taylor, pas très difficile
- stabilité Algébrique (Fourier), [CKSO]

En pratique: vérifier ~~stabilité~~ consistency (ponctuelle)
stabilité (L^∞, ppe max, L^2 Fourier)

Dem

schéma: $B_1 U^{n+1} = B_0 U^n + \tilde{F}^n$

soluℓ: $B_1 (E_{\Delta x} u)^{n+1} = B_0 (E_{\Delta x} u)^n + \tilde{F}^n + \varepsilon^n$

Erreur $e^n = U^n - (E_\Delta u)^n$

$\Rightarrow$ $B_1 e^{n+1} = B_0 e^n - \varepsilon^n$

stabilité $\Rightarrow$ $\|e^n\|_{\Delta x} \le C \|e^0\| + C' \max_{n\Delta t \le T} \|\varepsilon^n\|$, $e^0 = 0$

consistence $\Rightarrow$ $\|e^n\|_{\Delta x} \to 0$ $\boxtimes$

+ Général: Erreur même ordre que erreur troncature.

Critères de stabilité

Schéma $B_1 U^{n+1} = B_0 U^n + \tilde{F}^n$, $\iff U^{n+1} = AU^n + G^n$

Hyp $\|B_1^{-1}\| \leq K_1 \Delta t$ $A = B_1^{-1} B_0$, $G^n = B_1^{-1} \tilde{F}^n$

(Th) Schéma stable $\iff$
$\exists \tilde{C}(T), \forall n, \quad \|A^n\| \leq \tilde{C}(T)$

Dem 1) stable $\Rightarrow \leq$

On prend $\tilde{F}^n = 0$, $\forall n$

stabilité : $\forall U^0$, $\|A^n U^0\|_{\Delta x} \leq C_1(T) \|U^0\|_0$

$\Rightarrow \|A^n\| \leq C_1(T)$

2) $\Leftarrow$ Par récurrence :

$$U^n = A^n U^0 + \sum_{k=0}^{n} A^{n-k} G^k$$

$$\|U^n\| \leq \underbrace{\|A^n\| \|U^0\|} + \sum_k \|A^{n-k}\| \|G^k\|$$

$$\leq C_1(T) \|U^0\|$$

La somme $\|G^k\| \leq \|B_1^{-1}\| \|\tilde{F}^k\| \leq K_1 \Delta t \|\tilde{F}^k\|$

puis $\sum_{k=0}^{n} \|A^{n-k}\| \|G^k\| \leq K_1 \Delta t \, (n+1) \tilde{C}_1(T) \max_k \|F^k\|$

et $(n+1)\Delta t = T \Rightarrow n+1 = \frac{T}{\Delta t}$ et $\times \Delta t \Rightarrow$ borné ∎

(Rq) En pratique schéma homogène.

Rq Difficile à appliquer (cf suite, symétrique)

(Rq) Cas particulier : $\|A\|_{\Delta x} \leq 1 \Rightarrow$ schéma stable.

Rappels d'algèbre linéaire (norme 2)

$$\rho(B) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ vp } B\}$$

$$\|A\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

si A symétrique (normale) $\|A\|_{2,\Delta x} = \rho(A)$

⚠ FAUX si A PAS NORMALE ($A^T A = A A^T$)

Th | si A symétrique : schéma stable $\Longleftrightarrow \exists C'(T)$ tq
$$\rho(A) \leq 1 + C'(T)\Delta t$$

Rq CNS !!

Dem $\Leftarrow$: $\exists C'(T)$ tq $\rho(A) \leq 1 + C'(T)\Delta t$

$$\forall n, \quad \|A^n\|_{2,\Delta x} = \rho(A^n) = (\rho(A))^n \leq (1 + C'(T)\Delta t)^n$$
$$\leq e^{C'(T) n\Delta t} \leq e^{C'(T)\Delta t} \quad \text{borné}$$

$\Rightarrow$ schéma stable : $\|A^n\| = \rho(A)^n = \cancel{(1+C'(T)\Delta t)^n} \leq \tilde{C}(T)$

où : ~~$\forall n, \ 1 + C'(T)\Delta t$~~ $\rho(A) \leq \tilde{C}(T)^{1/n}$, $\forall n \leq \frac{T}{\Delta t}$

2 cas : $\tilde{C}(T) \leq 1 \Rightarrow \rho(A) \leq 1$. OK ($C'(T) = 0$)

$\tilde{C}(T) > 1$, $n = \frac{T}{\Delta t}$ et $\rho(A) \leq C(T)^{\frac{\Delta t}{T}} \leq e^{\frac{1}{T}\ln(C(T))}$

La fct $s \longrightarrow e^{s\ln(C(T))}$ est convexe sur $[0,1]$ (car $\ln C(T) > 0$)

d'où $e^{s\ln(C(T))} \leq (1-s) + s\, e^{\ln C(T)} = 1 + s(C(T) - 1)$

$s = \Delta t/T \Rightarrow \quad \rho(A) \leq 1 + \underbrace{\frac{(C(T)-1)}{T}}_{C'(T)}\Delta t$

☒

Rq CS $\rho(A) \leq 1$ utile si solution bornée

Rq Résultat non trivial : Lax-Milgram

le θ schéma (enfin !)

~~Matrices $B_1 = \frac{1}{\Delta t} I$, $B_0 =$~~

Matrices

- **Explicite** $B_1 = \frac{1}{\Delta t} I$ $\quad B_0 = \cancel{\frac{I}{\Delta t}} \frac{D}{\Delta x^2} T$ $\quad T = \text{tridiag}(-1, 2, -1)$
- **Implicite** $B_1 = \frac{I}{\Delta t} + \frac{D}{\Delta x^2} T$ $\quad B_0 = \frac{I}{\Delta t}$
- **θ schéma** $B_1 = \frac{I}{\Delta t} + \frac{D\theta}{\Delta x^2} T$ $\quad B_1 = \frac{I}{\Delta t} - (1-\theta)\frac{D\theta}{\Delta x^2} T$

Valeurs propres de $T = 2I - B$ ($\neq$ général $aI + bB$)

vp, $\vec{vp}$ de B (cf Le Dret–Lucquin p 277)

Th vp de ~~A~~ T sont ~~$\Longleftarrow$~~ $\lambda_j = 4 \sin^2 \frac{j\pi}{2(J+1)}$ $\quad j = 1, \dots, J$

vecteurs propres $(w_j)_k = \sin\left(\frac{jk\pi}{J+1}\right)$

cf cas continu !!

Explicite $\quad$ vp $B_1 = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \|B_1^{-1}\| = \Delta t$, $A = I - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} T$

les vp de A sont $\left(1 - 4\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{j\pi}{2(J+1)}\right)$

stabilité norme L^2 : $\rho(A) = \max\left(\left|1 - 4\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\frac{\pi}{2(J+1)}\right|, \left|1 - 4\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\frac{J\pi}{2(J+1)}\right|\right)$

$\Rightarrow$ $\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$ stable norme L^2 sinon instable

schéma implicite $\quad B_1 = \frac{I}{\Delta t} + \frac{D}{\Delta x^2} T \Rightarrow$ vp $B_1 = \frac{1}{\Delta t} + \frac{4D}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{j\pi}{2(J+1)}$

vp $B_1^{-1} = \frac{\Delta t}{1 + 4\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2(\,)} \leq \Delta t \rightarrow$ OK

$$A = B_1^{-1} B_0 = \left(I + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} T\right)^{-1}$$

$$\text{vp}A = \frac{1}{1 + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{j\pi}{2(J+1)}} \leq 1 \quad (\text{et} > 0)$$

Don schéma inconditionnellement stable en norme L^2

θ Schéma ? $\quad B_1 = \left(1 + \frac{\theta \Delta t D}{\Delta x^2} T\right)$, $B_0 = 1 - (1-\theta)\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} T$

$F = D\Delta t / \Delta x^2$ = nbre de Fourier (sans dimension)

$A = B_1^{-1} B_0$, valeurs propres

$$\lambda_j = \frac{1 - 4(1-\theta) F \sin^2 \frac{j\pi}{2(J+1)}}{1 + 4\theta F \sin^2 \frac{j\pi}{2(J+1)}}$$

$\theta \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \quad -1 \leq \lambda_j \leq 1$ toujours

$\theta < \frac{1}{2} \quad$ CNS $\quad F \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$

On a lors $\quad \lambda_j \leq 1$, condition $\lambda_j \geq -1$

$$\lambda_j = \frac{1 - 4(1-\theta) F s^2}{1 + 4\theta F s^2}$$

$$\lambda_j > -1 \iff 1 > 2 F s^2 (1 - 2\theta)$$

$1 - 2\theta < 0 \Rightarrow \forall j$ vrai

$1 - 2\theta > 0 \quad$ CS $\quad F(1-2\theta)$