Equation des ondes

① Rappel sur $\mathbb{R}$, formule de d'Alembert

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \partial_t u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds$$

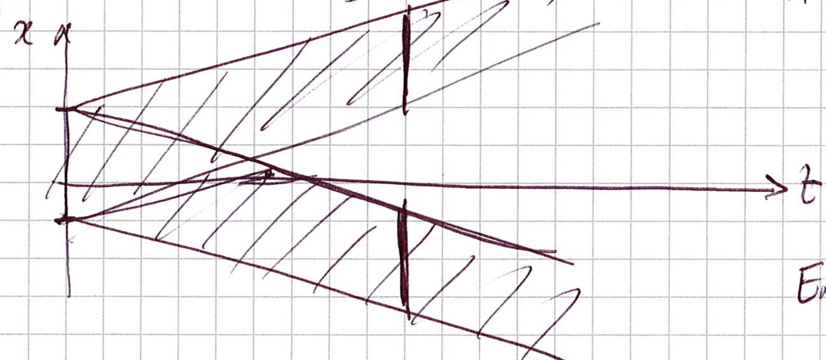
$\Rightarrow$ propagation à vitesse finie (c) :

si $\mathrm{supp}(\varphi, \psi) \subset [a,b]$ $\cancel{\Rightarrow}$

Dém
$\forall t$, $\mathrm{supp}\, u(\cdot,t) \subset [a-ct, b-ct] \cup [a+ct, b+ct]$

pour φ : $= 0$ sauf si $x \pm ct \in [a,b]$

pour ψ $= 0$ sauf si $[x-ct, x+ct] \cap [a,b] \neq \emptyset \Rightarrow x \pm ct \in [a,b]$



Ex $\begin{cases} \varphi(x) = (1-|x|)^2 & |x| \leq 1 \\ \ 0 & |x| \geq 1 \\ h = 0 \end{cases}$

singularité :

Conservation de l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx = E(0) = \mathrm{ct}$$

(si φ, ψ supp compact, ou $\partial_t u, \partial_x u \in L^2$)

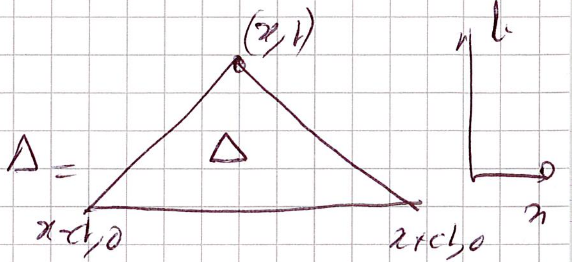
cf en domaine borné + tard.

Equation avec source

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \rho(x,t) & x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=0, \quad \partial_t u(x,t)=0 \end{cases}$$

+ superposition

(Th) $$u(x,t) = c^2 \int_\Delta \rho(y,s)\,dy\,ds$$



$$= c^2 \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \rho(y,s)\,dy \right) ds.$$

Dem 1 (Borthwick):

~~$u(x,0)=0, \ \partial_t u(x,t) = 0 + c^2\int_0^t$~~

Def $$\eta_s(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} \rho(y,s)\,ds$$

[sol de $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \eta_s - \partial_x^2 \eta_s = 0$, avec les C_I $\eta_s(x,0)=0$, $\partial_t \eta_s(x,s)\big|_{t=s} = \rho(x,s)$] cf d'Alembert

R : Mq $$u(x,t) = c^2 \int_0^t \eta_s(x,t)\,ds$$

$\rightarrow u(x,0) = 0,$

$$\partial_t u(x,t) = c^2 \underbrace{\eta_s(x,t)\big|_{s=t}}_{=0} + c^2 \int_0^t \partial_t \eta_s(x,t)\,ds = c^2 \int_0^t \partial_t \eta_s(x,t)\,ds$$

$\rightarrow \partial_t u(x,0) = 0$

EDP $$\partial_t^2 u(x,t) = c^2\, \partial_t \eta_s(x,t)\big|_{s=t} + c^2 \int_0^t \partial_t^2 \eta_s(x,t)\,ds$$

$$= c^2 \rho(x,t) + c^2 \int_0^t \partial_t^2 \eta_s(x,t)\,ds$$

et $\partial_x^2 u(x,t) = c^2 \int_0^t \partial_x^2 \cancel{q_s} q_s(x,t)\, ds$

$= c^2 \int_0^t \partial_t^2 q_s(x,t)\, ds$

D'où

$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u(x,t) = f(x,t) + \partial_x^2 u \Rightarrow$ EDP OK

$\blacksquare$

Dem 2 [cf Strauss]

Réflexion des ondes. Pb sur 1 demi-droite.

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & 0 < x < \infty, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = 0 & \leftarrow t \in \mathbb{R} \quad \text{Dirichlet en } x=0 \\ \cancel{\partial_x} u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Prolongement de φ et ψ par imparité

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases} \qquad \varphi(0) = 0 \quad (CN!!)$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & x < 0 \\ -\psi(-x) & x > 0 \end{cases} \qquad \psi(0) = 0$$

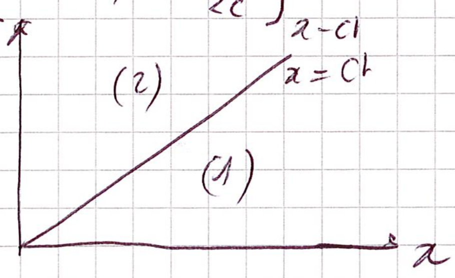
On note v la sol de l'éq des ondes sur $\mathbb{R}$ avec données de Cauchy $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$.

Alors u est sol du pb sur 1/2 droite, avec $u(0,t) = 0$

[vrai puisque ~~v~~ est impaire en x, cf TD, facile par d'Alembert]

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x+ct) + \tilde{\varphi}(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(y)\,dy$$

En pratique, 2 cas



① $|x| < ct$ Tout est $> 0 \Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy$$

② $|x| > ct$ ⚠ $x - ct < 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x-ct) = -\varphi(ct-x)$

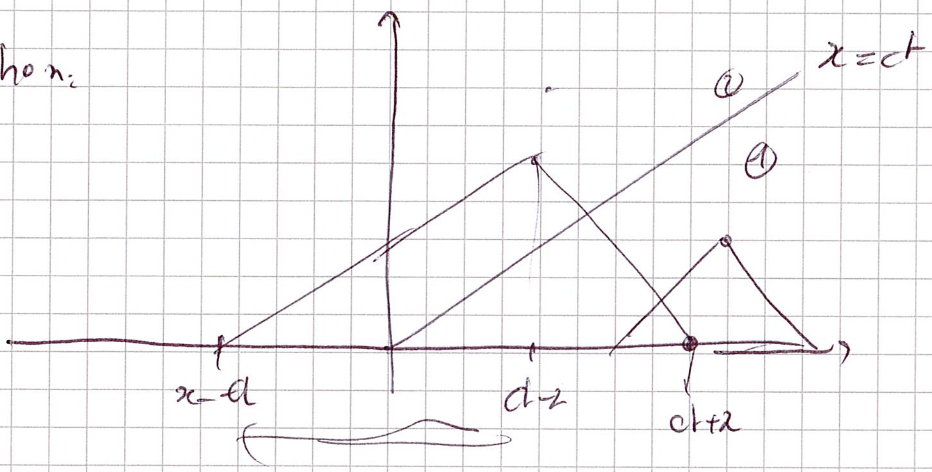
$$\text{et } \int = \int_0^{x+ct} \psi(y)\,dy + \int_{x-ct}^{0} -\psi(-y)\,dy$$

$$= \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(y)\,dy$$

Dans region ② :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} \psi(y)\,dy$$

Interpretation :



Pb sur un intervalle borné → Dirichlet (Neumann)

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_x u(0,t) = \partial_x u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

① Energie + unicité

× equation par $\partial_t u$, $\int_0^L$

$$\frac{1}{c^2}\int_0^L \partial_t^2 u\,\partial_t u\,dx - \int_0^L \partial_x^2 u\,\partial_t u = 0$$

↓ IPP

$$\frac{1}{2c^2}\int_0^L \partial_t(\partial_t u)^2\,dx + \int_0^L \partial_x u\,.\,\partial_{tx}^2 u + \underbrace{\left[\partial_x u\,\partial_t u\right]_0^L}_{=0} = 0$$

$$\frac{1}{2c^2}\frac{d}{dt}\int_0^L (\partial_t u)^2\,dx + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \partial_t(\partial_x u)^2}_{=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L(\partial_x u)^2} = 0$$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{c^2}\int_0^L (\partial_t u)^2 + \int_0^L (\partial_x u)^2 = cte = E(0) \qquad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ unicité (energie $=0 \Rightarrow \partial_t u = \partial_x u = 0$, CL $\Rightarrow u = 0$]

Ondes Fourier

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

DSF $\varphi = \sum a_k \sin \frac{k\pi x}{L}$, $\psi(x) = \sum b_k \sin k\pi \frac{x}{L}$

Hyp sur (φ, ψ) à venir.

$$u(x,t) = X(x)\, T(t) \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \ (= cte),$$

[les vp sont > 0] $\lambda_k = \frac{k\pi}{L}$ $k \geq 1$,

pour la partie en temps: $\boxed{\omega_k = k\pi \frac{c}{L}}$

$$\ddot{T}(t) = -c^2 \lambda^2 T = -\omega^2 T \Rightarrow \underline{T(t) = \alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t}$$

Sol à variable séparées : $u(x,t) = (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta \sin \omega_k t) \sin k\pi \frac{x}{L}$

Pour satisfaire les CI, dev^t série Fourier

$$u(x,t) \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t) \sin k\pi \frac{x}{L}$$

les $\omega_k = k\pi \frac{c}{L}$ sont des fréquences propres. Les fonction propres représentent les harmoniques.

Pour les CI : $u(x,0) = \sum \alpha_k \sin \frac{k\pi}{L} x \Rightarrow \boxed{\alpha_k = a_k}$

$$\partial_t u(x,0) = \sum \beta_k \omega_k \sin k\pi \frac{x}{L} \Rightarrow \beta_k = \frac{b_k}{\omega_k}$$

Solution avec CL, CI (+ EDP) $\omega_k = k\pi\, c/L$

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 1}^{\infty} \left(a_k \cos \omega_k t + b_k \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) \sin k\pi \frac{x}{L}$$

Lien avec d'Alembert

$$\begin{cases} \cos \mu ct \, \sin \mu x = \frac{1}{2}\left(\sin\mu(x+ct) + \sin\mu(x-ct)\right) \\ \sin \mu ct \cdot \sin \mu x = -\frac{1}{2}\left(\cos\mu(x+ct) - \cos\mu(x-ct)\right) \end{cases}$$

D'où $u(x,t) = \sum a_k \frac{1}{2}\left(\sin \mu_k(x+ct) + \sin \mu_k(x-ct)\right)$

$$- \sum \frac{b_k}{\mu_k c}\left(\cos \mu_k(x+ct) - \cos \mu_k(x-ct)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x+ct) + \tilde{\varphi}(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(y)\,dy$$

⚠ Ici $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ sont les extensions impaires, $2L$ périodiques de φ et ψ

$\Rightarrow$ phénomènes de réflexion sur les bords.

Existence/unicité de la solution

- Unicité par l'énergie (solution régulière $= C^2((0,L)\times(0,T))$)

$\times$ équation $\partial_t u \Rightarrow \frac{1}{c^2}\int_0^L \partial_t u \cdot \partial_t^2 u - \int_0^L \partial_t u \, \partial_x^2 u = 0 \quad (= ① + ②)$

$① = \frac{1}{c^2}\int_0^L \frac{1}{2}\partial_t(\partial_t u)^2 dx = \frac{1}{2c^2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\partial_t u|^2 dx$

$② = -\int_0^L \partial_t u \, \partial_x^2 u \underset{\text{IPP}}{=} \int_0^L \partial_t \partial_x u \cdot \partial_x u \, dx + \cancel{\partial_t u \cdot \partial_x u \Big|_0^L}$

$\quad = 0$ par les CI ($\partial_t u(x,0) = 0$)

$② = \int_0^L \partial_t |\partial_x u|^2 dx = \frac{d}{dt}\int_0^L |\partial_x u|^2 dx$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}E(t) = 0, \qquad E(t) = \underbrace{\int_0^L |\partial_t u|^2 dx}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\int_0^L |\partial_x u|^2 dx}_{\text{énergie potentielle}}$$

Existence

1. Convergence de la série

Hyp $\varphi \in C^4(0,L)$, $\psi \in C^3(0,L)$ [peuvent être affaiblies]

Formellement $\partial_t^2 u = \sum \omega_k^2 \left(a_k \cos \omega_k t + \frac{b_k}{\omega_k} \sin \omega_k t\right) \sin \frac{k\pi x}{L}$

Comme $\omega_k \simeq \frac{k\pi c}{L}$, convergence $\sum k^2 |a_k|$, $\sum k |b_k|$

Si $\varphi \in C^4 \Rightarrow a_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right)$, $\psi \in C^3 \Rightarrow b_k = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$

les 2 séries sont normalement convergentes

$\Rightarrow$ EDP, CL, CI OK.

? 2. Généralisation de d'Alembert

$\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$, ~~avec $\varphi(0)$~~

Par linéarité : d'abord $\varphi \neq 0$, $\psi = 0$, puis $\varphi = 0$, $\psi \neq 0$

$\psi = 0$. CL en $x=0$ $\quad \tilde{\varphi}(ct) + \tilde{\varphi}(-ct) = 0 \Rightarrow \tilde{\varphi}$ impaire

CL en $x = L$ $\quad \tilde{\varphi}(L+ct) + \tilde{\varphi}(L-ct) = 0$

$\Rightarrow$ symétrie / L

Impaire + symétrie $\Rightarrow$ invariance translation 2L $\Rightarrow$ 2L périodique

Pour $\varphi = 0$ $\quad x=0 \quad \int_{-ct}^{ct} \tilde{\psi}(y)\,dy = 0 \Rightarrow \tilde{\psi}$ impaire

$x = L \quad \int_{L-ct}^{L+ct} \tilde{\psi}(y)\,dy \Rightarrow \tilde{\psi}(L+ct) + \tilde{\psi}(L-ct) = 0$ (?)

idem $\tilde{\psi}$ impaire, 2L périodique

$\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ $C^2 \Rightarrow$ sol EDP OK