



THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386)

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Alice CHICHE

Sujet :

Théorie et algorithmes pour la résolution de problèmes
numériques de grande taille
Application à la gestion de production d'électricité

Organismes d'accueil :

EDF R&D (Clamart), département OSIRIS
INRIA Paris-Rocquencourt, projet POMDAPI

Soutenance le 28 juin 2012 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	Jérôme MALICK Jean-Philippe VIAL	INRIA Rhône-Alpes ORDECSYS
Examineurs :	Claude LEMARÉCHAL Michel MINOUX Adam OUOROU	INRIA Rhône-Alpes UPMC (Paris VI) Orange Labs
Directeur de thèse :	Jean Charles GILBERT	INRIA Paris-Rocquencourt
Encadrant industriel :	Kengy BARTY	EDF R&D

Table des matières

Table des matières	i
Liste des algorithmes	vii
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Remerciements	xiii
Résumé	xv
Abstract	xvii
Notations	xix
I Introduction	1
1 Organisation de la thèse et contributions apportées	3
1.1 Structure du document	3
1.2 Détail des contributions	4
2 La gestion de production d'électricité	7
2.1 Portée	7
2.1.1 Cadre industriel	7
2.1.2 Enjeux	8
2.2 Principes de base	9
2.2.1 Un parc varié, des ressources complémentaires	9
2.2.2 L'empilement et les coûts marginaux	9
2.2.3 La gestion des réserves système	10
2.2.4 Les groupes thermiques à flamme	10
2.2.5 Les tranches nucléaires	11
2.2.6 La production hydraulique	12
2.2.7 Des visions à plus ou moins long terme	12
2.3 Différentes perspectives	12
2.3.1 Le long-terme	12
2.3.2 Le moyen-terme	12
2.3.3 L'hebdomadaire	13
2.3.4 Le journalier	14
2.3.5 L'infra-journalier	14

3	L'optimisation stochastique sur arbres de scénarios	15
3.1	Les arbres de scénarios	15
3.1.1	Formulation d'un problème stochastique multi-étapes	15
3.1.2	Enjeux	16
3.1.3	Caractéristiques	16
3.1.4	De l'arbre au peigne	17
3.2	Construction des arbres de scénarios	17
3.2.1	Difficultés potentielles	17
3.2.2	Une distribution de probabilité initiale	17
3.2.3	Méthodes de construction	18
3.2.4	Critères d'évaluation des méthodes de génération de scénarios	22
3.2.5	Comparaison de la méthode implémentée dans SOPRANO et de la réduction backward récursive	23
3.3	Méthodes d'optimisation stochastique sur arbres de scénarios	24
3.3.1	Une minimisation de la distance aux solutions séparées par scénarios	24
3.3.2	L'algorithme d'approximation quadratique diagonale	25
3.3.3	L'algorithme de fractionnement dynamique	25
3.3.4	La méthode de décomposition stochastique sur arbres de scénarios	25
3.4	Critique des arbres de scénarios	25
II	La méthode du lagrangien augmenté	27
4	Présentation de l'algorithme du lagrangien augmenté	29
4.1	Origine	29
4.1.1	Une extension des méthodes de pénalisation	29
4.1.2	Une fonction de pénalisation	30
4.1.3	La méthode des multiplicateurs	31
4.2	Description	31
4.3	Usage	32
4.3.1	Avantages	32
4.3.2	Mise en œuvre	32
4.4	Interprétation proximale	33
4.4.1	Rappels sur les opérateurs monotones	33
4.4.2	Opérateur et algorithme proximal	34
4.4.3	La méthode des multiplicateurs	34
4.5	Convergence	34
4.5.1	Saut de dualité	34
4.5.2	Vitesse de convergence dans le cas convexe	35
4.5.3	Contrôle de la vitesse de convergence	35
4.6	Méthodes de décomposition du lagrangien augmenté	37
4.6.1	Le principe du problème auxiliaire	37
4.6.2	La méthode d'approximation quadratique diagonale	37
4.6.3	L'algorithme du lagrangien augmenté séparable	38
4.6.4	Recherche linéaire d'Armijo décomposée	39
4.7	Extensions	39
4.7.1	La méthode proximale des multiplicateurs	39
4.7.2	Lagrangien augmenté dans le dual	39
4.7.3	Règles alternatives de mise à jour des multiplicateurs	39
4.7.4	Améliorations numériques	40

4.8	Les problèmes quadratiques strictement convexes sous contraintes d'égalité non réalisables	41
4.8.1	Introduction	41
4.8.2	Description du problème	42
4.8.3	Le lagrangien augmenté	42
4.8.4	Résultat de convergence	42
5	How the augmented Lagrangian algorithm deals with an infeasible convex quadratic optimization problem	47
5.1	Introduction	47
5.2	Problem structure	52
5.2.1	On quadratic optimization	52
5.2.2	The dual function	53
5.2.3	The smallest feasible shift	58
5.2.4	The closest feasible problem	59
5.3	Global linear convergence	62
5.3.1	Convergence to a solution to the closest feasible problem	63
5.4	The revised AL algorithm	65
5.4.1	The stopping criterion revisited	65
5.4.2	Revised augmented Lagrangian algorithm	68
5.5	Perspectives	68
	Acknowledgment	69
III	L'algorithme du recouvrement progressif	71
6	Présentation de l'algorithme du recouvrement progressif	73
6.1	Description	73
6.1.1	Circonstances d'application	73
6.1.2	Une décomposition par scénarios	73
6.2	Cadre mathématique	74
6.2.1	Notations générales	74
6.2.2	La contrainte de non-anticipativité	74
6.2.3	L'opérateur d'agrégation	76
6.3	Principe du recouvrement progressif	77
6.3.1	Dénomination de l'algorithme	77
6.3.2	Un lagrangien augmenté « local »	78
6.3.3	L'algorithme	79
6.3.4	Interprétation des multiplicateurs	79
6.4	Interprétations de l'algorithme	80
6.4.1	Un lagrangien augmenté minimisé approximativement par Gauss-Seidel	80
6.4.2	Interprétation en termes de recherche de points-selles	81
6.4.3	Interprétation proximale	85
6.4.4	Un algorithme de séparation	85
6.5	Résultats théoriques disponibles	85
6.5.1	Hypothèses générales	86
6.5.2	Résultats intermédiaires	86
6.5.3	Convergence	86
6.6	Précédentes expérimentations numériques	87
6.6.1	Grande diversité des applications	87

6.6.2	Importance du choix du paramètre de pénalisation	88
6.6.3	Résolution approximative des sous-problèmes	88
6.6.4	Initialisation des variables primales	89
6.6.5	Comportement en fonction du type de problème	89
6.6.6	Comparaison avec d'autres méthodes d'optimisation stochastique	89
6.7	Améliorations heuristiques	90
6.7.1	Réglage dynamique du paramètre de pénalisation	90
6.7.2	Initialisation des variables duales	90
6.7.3	Fixation anticipée de variables	91
6.7.4	Parallélisation et gestion des processeurs	91
6.7.5	Extension de la notion de scénario	92
6.7.6	Perturbation des poids des scénarios	92
6.8	Extensions	92
6.8.1	Réglage adaptatif des paramètres	92
6.8.2	Application à des problèmes non séparables par scénarios	93
6.8.3	Application à des problèmes non convexes	93
6.8.4	Combinaison à des heuristiques	93
7	Études relatives à la convergence du recouvrement progressif	95
7.1	Non-convergence à paramètre variable	95
7.1.1	Enjeux et origine de l'étude	95
7.1.2	Contre-exemple	96
7.1.3	Commentaires	101
7.2	Convergence des multiplicateurs associés aux contraintes non dualisées	101
7.2.1	Deux formulations du problème	102
7.2.2	D'une formulation à l'autre	103
7.2.3	Convergence des variables duales dans le cas convexe	113
7.2.4	Exploitation du résultat	115
IV	Application : la gestion de production d'électricité	117
8	Application du recouvrement progressif à un problème de gestion de production d'électricité	119
8.1	Présentation du modèle étudié	119
8.1.1	La gestion du nucléaire	119
8.1.2	L'outil SOPRANO	120
8.2	Mise en œuvre	125
8.2.1	Exploitation d'une résolution frontale	125
8.2.2	Jeux de données utilisés	127
8.2.3	Précisions techniques	130
8.3	Écriture réduite du problème	130
8.3.1	Problème primal	130
8.3.2	Problème dual associé à la relaxation de la contrainte d'équilibre offre-demande	130
8.4	Première implémentation et évolutions	131
8.4.1	Version initiale de l'algorithme	131
8.4.2	Changements de variables	132
8.4.3	Ajout d'un test d'arrêt	138
8.5	Comparaison des coûts marginaux par rapport à ceux issus du modèle initial	139
8.5.1	Démarche suivie	141

TABLE DES MATIÈRES

8.5.2	Unicité des coûts marginaux	141
8.5.3	Résultats obtenus	141
8.6	Perspectives	145
8.6.1	Parallélisation	145
8.6.2	Prise en compte des variables entières	145
8.6.3	Une stratégie de coordination alternative	146
V	Épilogue	147
9	Conclusions et perspectives	149
9.1	L'algorithme du lagrangien augmenté	149
9.2	L'algorithme du recouvrement progressif	150
	Bibliographie	153
	Index	163

Liste des algorithmes

1	Lagrangien augmenté	31
2	Lagrangien augmenté appliqué à un problème quadratique convexe réalisable	36
3	Lagrangien augmenté appliqué à un problème quadratique convexe (réalisable ou non)	68
4	Recouvrement progressif	79
5	Recouvrement progressif appliqué à SOPRANO-scénarios	131
6	Recouvrement progressif appliqué à SOPRANO-scénarios, avec mise à l'échelle	135

Liste des figures

3.1	Première étape de la construction des arbres pour l'outil SOPRANO : des chroniques d'aléas aux scénarios	19
3.2	Deuxième étape de la construction des arbres pour l'outil SOPRANO : regroupement des scénarios à chaque période, en fonction de leurs normes, et sélection d'un scénario représentatif dans chaque groupe	20
5.1	Illustration de l'espace \mathcal{S} des translations réalisables et de la plus petite translation réalisable \bar{s}	59
5.2	Illustration du théorème 5.22 de convergence linéaire globale de l'algorithme du lagrangien augmenté sur un problème non réalisable	65
5.3	Taux de convergence linéaire d'une suite et de la suite de ses différences	67
6.1	Illustration de la contrainte de non-anticipativité	75
7.1	Chemin des itérés du recouvrement progressif, avec r variable faisant cycliser l'algorithme	98
7.2	Chemin des itérés du recouvrement progressif, avec r variable faisant converger l'algorithme	99
7.3	Chemin des itérés du recouvrement progressif, avec r variable faisant diverger l'algorithme	99
7.4	Chemin des itérés du recouvrement progressif, avec r constant faisant converger l'algorithme	100
8.1	Architecture globale de SOPRANO-REP	125
8.2	Pré-traitement des données de SOPRANO-REP	126
8.3	Résolution itérative des sous-problèmes de SOPRANO-REP	126
8.4	Pré-traitement des données de SOPRANO-scénarios	128
8.5	Résolution itérative des sous-problèmes de SOPRANO-scénarios	128
8.6	Arbre à 23 scénarios (1097 nœuds) pour le jeu de données de 10 semaines	129
8.7	Comportement du recouvrement progressif, dans sa version initiale, sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines, en fonction du paramètre de pénalisation choisi, avec une précision de 10^{-4}	133
8.8	Vitesse de convergence vers 0 de la contrainte de non-anticipativité au cours de l'exécution du recouvrement progressif, dans sa version initiale, sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines	134
8.9	Comportement du recouvrement progressif avec mise à l'échelle des variables sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines, en fonction du paramètre de pénalisation choisi, avec une précision de 10^{-4}	136
8.10	Vitesse de convergence vers 0 de la contrainte de non-anticipativité au cours de l'exécution du recouvrement progressif (dans sa version initiale et avec mise à l'échelle) pour un facteur de pénalisation $r = 10$, sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines	137

8.11	Vitesse de convergence vers 0 de la contrainte de non-anticipativité au cours de l'exécution du recouvrement progressif (avec mise à l'échelle), sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines	137
8.12	Comportement du recouvrement progressif avec mise à l'échelle et translation des variables sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines, en fonction du paramètre de pénalisation choisi, avec une précision de 10^{-4}	139
8.13	Comportement du recouvrement progressif avec mise à l'échelle, translation des variables et ajout d'un test d'arrêt, sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines, en fonction du paramètre de pénalisation choisi, avec une précision de 10^{-5} pour les critères d'arrêts primal et primal-dual	140
8.14	Erreurs relatives sur les coûts marginaux pour le jeu de données de 10 semaines, en chaque poste des nœuds de l'arbre correspondant à la première semaine	142
8.15	Erreurs relatives sur les coûts marginaux pour le jeu de données de 70 semaines, en chaque poste des nœuds de l'arbre correspondant à la première semaine	144
8.16	Erreurs relatives sur les coûts marginaux pour le jeu de données de 3 ans, en chaque poste des nœuds de l'arbre correspondant à la première semaine	145

Liste des tableaux

8.1	Erreurs relatives sur le coût optimal et les coûts marginaux, obtenues pour le jeu de données de 10 semaines	142
8.2	Erreurs relatives sur les coûts marginaux de la première semaine, obtenues pour le jeu de données de 10 semaines	142
8.3	Erreurs relatives sur le coût optimal et les coûts marginaux, obtenues pour le jeu de données de 70 semaines	143
8.4	Erreurs relatives sur les coûts marginaux de la première semaine, obtenues pour le jeu de données de 70 semaines	143
8.5	Erreurs relatives sur le coût optimal et les coûts marginaux, obtenues pour le jeu de données de 3 ans	143
8.6	Erreurs relatives sur les coûts marginaux de la première semaine, obtenues pour le jeu de données de 3 ans	144

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les deux rapporteurs Jérôme Malick et Jean-Philippe Vial pour leur lecture tant éclairée qu'éclairante de mon manuscrit, ainsi que Claude Lemaréchal, Michel Minoux et Adam Ouorou pour avoir accepté d'honorer ma soutenance de thèse de leur présence.

Bien naturellement, mes pensées se tournent ensuite vers Jean Charles Gilbert, auquel je sais gré de son investissement d'envergure au cours de cette thèse, de l'exemple permanent prodigué par ses compétences éminentes et ses vastes connaissances, ainsi que de l'habileté de son encadrement régulier et avisé.

Je loue également le tutorat de Kengy Barty qui a su m'adresser, ces cinq dernières années, de précieux conseils teintés de sagesse. À l'avenant, je suis reconnaissante à Marc Porcheron pour m'avoir guidée avec bienveillance dans les méandres du code Soprano, et pour m'avoir consacré du temps - dont je sais qu'il disposait pourtant peu - afin de m'accompagner au travers de considérations industrielles liées à la gestion de production d'électricité. Je n'oublie pas non plus Arnaud Lenoir qui a fait montre d'un investissement conséquent quant à l'étude de sujets théoriques précis, et au côté duquel je me suis réjouis de réfléchir. J'ai de même pu admirer les compétences de Grace Doukopoulos, tant pour sa maîtrise de l'anglais que pour celle de Cplex.

Je salue l'équipe de direction - Yannick Jacquemart, François-Régis Montclar et Fabrice Chauvet - du département OSIRIS de la R&D d'EDF pour avoir financé cette thèse, ainsi que les chefs de groupe successifs - Luciano Leal de Sousa, Sandrine Charousset et Ala Ben Abbes - qui en ont consciencieusement suivi le bon déroulement. J'ai vivement apprécié ces cinq années passées à collaborer avec les personnalités qualifiées et cordiales de ce département, en particulier celles des groupes R35 et R36.

En outre m'a tout autant agréé l'accueil du projet POMDAPI - anciennement ESTIME - de l'INRIA Paris-Rocquencourt, au sein duquel j'ai eu la chance de goûter à un cadre de recherche stimulant, constitué d'une équipe brillante et émérite, remarquablement menée par Jérôme Jaffre.

Je rends grâce à l'efficacité des diverses assistantes avec lesquelles j'ai eu l'opportunité de travailler, et qui m'ont rendu de nombreux et précieux services : Nathalie à l'INRIA et, à EDF, Audrey, Lætitia, Lise, Marylène, ainsi qu'occasionnellement Agnès et les deux Christelles.

Je me félicite d'avoir reçu l'enseignement de professeurs dont la qualification et l'exemple remarquables m'ont insufflé l'envie de poursuivre dans la voie des mathématiques, notamment Mr. Prévost, Mr. Grivaux, Pierre Carpentier et Jean Charles Gilbert. Je suis aussi redevable à Richard James de m'avoir réconciliée avec l'anglais par le biais de ses cours joyeux et dynamiques.

J'applaudis la patience de ceux qui ont partagé mon bureau : Fred, qui a su maintenir à un niveau éminent mes connaissances des potins les plus affriolants, Sandrine, qui a su égayer mes journées par ses post-its et autres affichages muraux aussi insolites que récréatifs, et Ibtihel, qui a su m'épauler grâce à nos discussions réconfortantes et rafraîchissantes. Je n'omets pas mes voisins : David, qui m'a presque laissée gagner au ping-pong, Georgios, qui a porté mon sac de badminton, et Seb, qui m'a fait déguster des verrines à satiété. Au-delà de ces aspects pratiques, leur proximité a été un agrément quotidien.

Ma considération va également à mes partenaires et adversaires de badminton qui m'ont permis de canaliser mon stress et m'ont donné du cœur à l'ouvrage. Je ne méconnais pas non plus les

bienfaits procurés par les soirées tarot passées en compagnie de joueuses talentueuses, ni par les parties de poker et autres nocturnes du vendredi.

J'en profite également pour remercier mes amies de m'avoir offert tant de soirées gastronomiques : Anne-Laure pour le chocolat (ainsi que pour son écoute douce et bienveillante), Audrey, Grace et Sandrine pour les dîners à thèmes multiculturels (ainsi que pour leur amitié authentique et bien-faisante), Hélène, Marie et Tazie pour les dégustations de bières et de frites (ainsi que pour leur soutien infailible et leurs encouragements indéfectibles), Katell pour le champagne (ainsi que pour sa compréhension unique), Stéphanie pour le foie gras (ainsi que pour nos discussions prolongées).

Je suis reconnaissante envers mes parents pour leur confiance assurée, leur appui, leur écoute, leur chaleur, ainsi qu'envers mes sœurs et leurs conjoints pour leur bienveillance et leur soutien, sans oublier les sourires de la petite Noémie. Ma pensée va aussi à ma belle-famille pour sa compréhension.

Enfin, merci au pilier de ma vie d'avoir si bien rempli ce rôle, de m'avoir toujours soutenue et encouragée, d'avoir porté une part de mes soucis, de m'avoir accompagnée sur ce chemin et d'en avoir effacé tous les obstacles.

Résumé

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la résolution de problèmes numériques de grande taille, en particulier à ceux se rapportant à la gestion de production d'électricité.

Nous y étudions, dans une première partie, l'algorithme du lagrangien augmenté et présentons un résultat de convergence linéaire globale de cet algorithme appliqué à un problème quadratique convexe sous contraintes d'égalité et d'inégalité linéaires, éventuellement incompatibles. Ce résultat nous permet de suggérer une règle pour déterminer itérativement le paramètre d'augmentation de l'algorithme, de manière à en contrôler la vitesse de convergence. Nous démontrons également que l'algorithme fournit, à la convergence, la translation la plus petite - au sens de la norme euclidienne - rendant les contraintes réalisables.

L'application industrielle de nos travaux consistant à résoudre des problèmes stochastiques formulés sur des arbres de scénarios, nous exposons, dans une deuxième partie, notre étude d'un algorithme proximal spécifiquement adapté à la décomposition scénario par scénario. Il s'agit de l'algorithme du « recouvrement progressif » (ou « progressive hedging ») introduit dans [Rockafellar et Wets, 1991]. D'une part, nous construisons un contre-exemple mettant en évidence que cet algorithme peut diverger si l'on fait varier itérativement son paramètre. D'autre part, nous fournissons un résultat de convergence des multiplicateurs associés à des contraintes non dualisées au cours de l'exécution de cette méthode.

Dans une troisième partie, nous produisons les résultats numériques que nous avons obtenus suite à l'application de l'algorithme du recouvrement progressif à un problème réel de gestion de production d'électricité sur un horizon moyen-terme.

Mots-clés

Arbre de scénarios - Décomposition par scénarios - Gestion de production d'électricité - Grands problèmes - Lagrangien augmenté - Méthode proximale - Optimisation - Problème non réalisable - Recouvrement progressif

Abstract

This manuscript deals with large-scale optimization problems, and more specifically with solving the electricity unit commitment problem arising at EDF.

First, we focused on the augmented Lagrangian algorithm. The behavior of that algorithm on an infeasible convex quadratic optimization problem is analyzed. It is shown that the algorithm finds a point that satisfies the shifted constraints with the smallest possible shift in the sense of the Euclidean norm and that it minimizes the objective on the corresponding shifted constrained set. The convergence to such a point is realized at a global linear rate, which depends explicitly on the augmentation parameter. This suggests us a rule for determining the augmentation parameter to control the speed of convergence of the shifted constraint norm to zero. This rule has the advantage of generating bounded augmentation parameters even when the problem is infeasible. As a by-product, the algorithm computes the smallest translation in the Euclidean norm that makes the constraints feasible.

Furthermore, this work provides solution methods for stochastic optimization industrial problems decomposed on a scenario tree, based on the progressive hedging algorithm introduced by [Rockafellar et Wets, 1991]. We also focus on the convergence of that algorithm. On the one hand, we offer a counter-example showing that the algorithm could diverge if its augmentation parameter is iteratively updated. On the other hand, we show how to recover the multipliers associated with the non-dualized constraints defined on the scenario tree from those associated with the corresponding constraints of the scenario subproblems. Their convergence is also analyzed for convex problems.

The practical interest of these solutions techniques is corroborated by numerical experiments performed on the electric production management problem. We apply the progressive hedging algorithm to a realistic industrial problem. More precisely, we solve the French medium-term electricity planning problem that consists in minimizing the expected electricity production cost, considering physical constraints like the boundaries of 155 production units and the dynamic evolution of nuclear stocks, and imposing the equilibrium between production and demand. We also illustrate the multiplier convergence result on the problem that consists in determining the marginal cost of the supply-demand equilibrium in the medium-term electricity planning at Électricité de France.

Keywords

Augmented Lagrangian - Electricity planning problem - Large-scale problem - Optimization - Progressive hedging - Proximal method - Scenario decomposition - Scenario tree - Unfeasible problem

Notations

Soit \mathbb{E} un espace vectoriel euclidien, muni d'une norme $\|\cdot\|$ associée à un produit scalaire.

Notations dédiées aux ensembles

$\text{adh}(A)$	adhérence d'une partie A de \mathbb{E} ; il s'agit du plus petit fermé de \mathbb{E} contenant A .
$\text{aff}(A)$	enveloppe affine d'une partie non vide A de \mathbb{E} ; il s'agit du plus petit sous-espace affine de \mathbb{E} contenant A .
C^∞	cône asymptotique d'un convexe fermé non vide C de \mathbb{E} : $C^\infty = \{d \in \mathbb{E} / C + \mathbb{R}_+ d \subset C\}$.
$\text{dist}(x, X)$	distance d'un point $x \in \mathbb{E}$ à un ensemble $X \subset \mathbb{E}$: $\text{dist}(x, X) = \inf_{y \in X} \ x - y\ $.
$ I $	cardinal d'un ensemble dénombrable I .
$\text{intr}(A)$	intérieur relatif d'une partie non vide A de \mathbb{E} ; il s'agit de l'intérieur de A dans son enveloppe affine : $\text{intr}(A) := \{x \in A / \exists V \subset \text{Vois}_{\mathbb{E}}(x), (V \cap \text{aff}(A)) \subset A\}$.
\mathbb{N}	ensemble des nombres entiers positifs ou nuls.
$N_X(x)$	cône normal à un ensemble $X \subset \mathbb{E}$ en x : $N_X(x) = \{d \in \mathbb{E} / \forall y \in X, \langle d, y - x \rangle \leq 0\}$.
$\mathbb{P}_X(x)$	projection de x sur un ensemble X convexe fermé non vide inclus dans \mathbb{E} : $\mathbb{P}_X(x)$ est l'unique solution du problème $\min_{y \in X} \ y - x\ $.
\mathbb{R}	ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}_+	ensemble des réels positifs ou nuls (parfois appelé « orthant positif » de \mathbb{R}).
\mathbb{R}_+^*	ensemble des réels strictement positifs.
\mathbb{R}^n	ensemble des n -uplets (x_1, \dots, x_n) formés des réels x_1, \dots, x_n .
\mathbb{R}_+^n	orthant positif de \mathbb{R}^n : $\{x \in \mathbb{R}^n / \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq 0\}$.
$\text{Vois}_{\mathbb{E}}(x)$	ensemble des voisinages de x dans \mathbb{E} ; il s'agit des sous-ensembles contenant un ouvert contenant x .

Notations liées aux fonctions et multifonctions

$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$	multifonction : fonction définie sur \mathbb{E} à valeurs dans les parties d'un ensemble \mathbb{F} .
$\text{Conv}(\mathbb{E})$	ensemble des fonctions de \mathbb{E} dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, convexes et non-identiquement égales à $+\infty$.
$\overline{\text{Conv}}(\mathbb{E})$	partie de $\text{Conv}(\mathbb{E})$ formée des fonctions fermées (c'est-à-dire semi-continues inférieurement).
$\text{Dom } F$	domaine d'une multifonction $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$: $\text{Dom } F = \{x \in \mathbb{E} / F(x) \neq \emptyset\}$.
$\text{dom } f$	domaine d'une fonction $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$: $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{E} / f(x) < +\infty\}$.
δ_X	fonction caractéristique de l'ensemble X : si $x \in X$, $\delta_X(x) = 0$; sinon, $\delta_X(x) = +\infty$.

$\partial f(x)$	sous-différentiel en x d'une fonction $f \in \text{Conv}(E)$: $\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{E} / \forall y \in \mathbb{E}, f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle\}$.
$\text{epi } f$	épigraphe d'une fonction $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : \text{epi } f = \{(x, \alpha) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} / f(x) \leq \alpha\}$.
f^*	conjuguée de Fenchel d'une fonction $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre et ayant une minorante affine : $f^* : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \forall x^* \in \mathbb{E}, f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{E}} (\langle x^*, x \rangle - f(x))$.
f^{**}	biconjuguée d'une fonction $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre et ayant une minorante affine : $f^{**} : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{E}, f^{**}(x) = \sup_{x^* \in \mathbb{E}} (\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*))$.
$\mathcal{G}r(F)$	graphe d'une multifonction $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F} : \mathcal{G}r(F) = \{(x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F} / y \in F(x)\}$.
$g \circ f$	composition d'une fonction g par une fonction $f : (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
$\nabla f(x)$	gradient en x d'une fonction f .
$Id_{\mathbb{E}}$	fonction identité sur $\mathbb{E} : \forall x \in \mathbb{E}, Id_{\mathbb{E}}(x) = x$.
$\inf_{i \in I} f_i$	enveloppe inférieure des fonctions $f_i : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, i \in I$ (ensemble d'indices) : $\forall x \in \mathbb{E}, (\inf_{i \in I} f_i)(x) = \inf_{i \in I} (f_i(x))$.
$\text{prox}_{\delta, r}(\lambda)$	point proximal de $\lambda \in \mathbb{R}^m$ associé à $\delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $r > 0$: $\text{prox}_{\delta, r}(\lambda) = \arg \min_{\mu \in \mathbb{R}^m} (\delta(\mu) + \frac{1}{2r} \ \mu - \lambda\ ^2)$.
$\mathcal{R}(F)$	image d'une multifonction $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F} : \mathcal{R}(F) = \{y \in \mathbb{F} / \exists x \in \mathbb{E}, y \in F(x)\}$.
$\sup_{i \in I} f_i$	enveloppe supérieure des fonctions $f_i : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, i \in I$ (ensemble d'indices) : $\forall x \in \mathbb{E}, (\sup_{i \in I} f_i)(x) = \sup_{i \in I} (f_i(x))$.
$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$	suite : application définie sur \mathbb{N} .

Notations matricielles et vectorielles

$A \succ 0$	A est symétrique définie positive.
$A^{1/2}$	unique matrice racine d'une matrice réelle $A \succ 0$ (c'est-à-dire dont le carré vaut A), qui possède les mêmes sous-espaces propres que A et dont les valeurs propres associées sont les racines de celles de A .
$A^{-1/2}$	inverse de $A^{1/2}$.
$\text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$	matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont les A_i , et dont tous les autres éléments sont nuls.
$\mathcal{R}(A)$	image d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{R}(A) = \{Ax, x \in \mathbb{R}^m\}$.
A^T	transposée d'une matrice $A : (A^T)_{i,j} = A_{j,i}$.
$(e^i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$	vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n : la i -ème composante de e^i vaut 1 et les autres valent 0.
Id	matrice identité.
$x \geq 0$	vecteur x dont toutes les composantes sont positives ou nulles.
$x > 0$	vecteur x dont toutes les composantes sont strictement positives.
$x \leq 0$	vecteur x dont toutes les composantes sont négatives ou nulles.
$x < 0$	vecteur x dont toutes les composantes sont strictement négatives.
x^+	vecteur dont les composantes sont définies par $x_i^+ = \max(0, x_i)$.
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire euclidien de deux vecteurs x et y (somme des produits de leurs composantes).
$\langle x, y \rangle_Q$	produit scalaire associé à une matrice Q définie positive : $\langle x, y \rangle_Q = x^T Q y$.
$x \cdot y$	produit de Hadamard de deux vecteurs x et y (vecteur dont chaque composante est le produit des composantes de x et y).
$\ x\ $	norme associée à un produit scalaire $\phi(\cdot, \cdot)$ quelconque : $\ x\ = \phi(x, x)^{\frac{1}{2}}$.
$\ x\ _2$	norme ℓ_2 (ou norme euclidienne) d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n : \ x\ _2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.
$\ x\ _\infty$	norme ℓ_∞ du vecteur $x : \ x\ _\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i $.

$\|x\|_Q$ norme associée à la matrice Q définie positive, c'est-à-dire au produit scalaire associé à Q .

Notations spécifiques à l'optimisation

On considère un problème d'optimisation

$$(P) \quad \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{C}} f(x), \\ g_E(x) = 0, \\ g_I(x) \leq 0, \end{cases}$$

où E et I sont des ensembles finis disjoints d'indices vérifiant $E \cup I = \{1, \dots, m\}$, \mathcal{C} est un ensemble, $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$. On note X l'ensemble admissible de (P) , c'est-à-dire, $X := \{x \in \mathcal{C} / g_E(x) = 0, g_I(x) \leq 0\}$.

- $\arg \min_{x \in X} f(x)$ ensemble des solutions du problème (P) .
- $\text{val}(P)$ valeur optimale du problème (P) ($\text{val}(P) = +\infty$ si (P) est un problème de minimisation non réalisable).
- z_E vecteur dont les éléments sont les composantes du vecteur $z \in \mathbb{R}^m$ dont les indices appartiennent à E .
- z_I vecteur dont les éléments sont les composantes du vecteur $z \in \mathbb{R}^m$ dont les indices appartiennent à I .
- $z^\#$ vecteur de \mathbb{R}^m dont les composantes sont définies par

$$\begin{cases} \text{si } z_i \in E, & z_i^\# = z_i; \\ \text{si } z_i \in I, & z_i^\# = z_i^+. \end{cases}$$

Notations propres aux arbres de scénarios

On suppose que chaque scénario $s \in \mathcal{S}$ constituant l'arbre considéré est pondéré par une probabilité p_s .

- $\mathfrak{S}_C(i)$ ensemble des scénarios dans lesquels une contrainte i est présente.
- $\mathfrak{S}_N(j)$ ensemble des scénarios passant par un nœud j .
- $\tau(j)$ pas de temps correspondant à un nœud j .
- $\langle X|Y \rangle$ produit scalaire « stochastique » de deux vecteurs définis sur un peigne : $\langle X|Y \rangle = \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \langle X(s), Y(s) \rangle$.

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Organisation de la thèse et contributions apportées

Ce document présente les travaux effectués dans le cadre de la thèse de doctorat intitulée « Théorie et algorithmes pour la résolution de problèmes numériques de grande taille - application à la gestion de production d'électricité ». Cette thèse a fait l'objet d'un contrat CIFRE entre le département OSIRIS de la division R&D d'EDF, le projet POMDAPI de l'INRIA Paris-Rocquencourt et l'école doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386).

Les problèmes abordés sont des problèmes d'optimisation dits de « grande taille », et qui sont susceptibles de prendre en compte divers aléas. Ces aléas sont approchés, dans le cadre de notre étude, par une représentation discrète prenant la forme d'arbres de scénarios. Une application directe de la résolution de tels problèmes est la gestion de production d'électricité à l'horizon moyen-terme (soit sur une plage de temps de cinq à dix ans), qui consiste à décider des stratégies optimales d'arbitrage de production par chacune des unités (nucléaire, hydraulique, thermique à flamme, ...) du parc dont dispose EDF.

1.1 Structure du document

Nous avons choisi d'agencer ce manuscrit en cinq parties.

Dans cette première partie introductive, nous présentons les enjeux et problématiques de la gestion de production d'électricité, qui constitue l'application pratique des travaux effectués au cours de ce doctorat. Puis, nous y développons les principales notions liées à l'étude de problèmes formulés sur des arbres de scénarios ; ainsi, nous fournissons une brève revue des méthodes de construction d'arbres de scénarios, suivie d'une description de méthodes de résolution spécifiquement adaptées à cette classe de problèmes.

La deuxième partie de cette thèse a trait à la méthode du lagrangien augmenté. Nous y présentons d'abord l'algorithme dans sa version originale ainsi que dans sa vision proximale (qui nous sera utile par la suite), les résultats de convergence associés et les différentes approches de décomposition de grands problèmes qui sont dérivées de cette méthode. Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons au comportement de l'algorithme du lagrangien augmenté lorsqu'on cherche à résoudre des problèmes dits « non réalisables » - c'est-à-dire dont les contraintes ne sont pas compatibles entre elles - qui caractérisent en particulier les situations où EDF n'est pas en mesure de satisfaire la demande de l'ensemble des consommateurs d'électricité. Nous y démontrons la convergence linéaire globale de la méthode pour un problème quadratique convexe, dans un cadre général comprenant le cas non réalisable.

La troisième partie concerne quant à elle l'algorithme du recouvrement progressif (connu également sous le label anglophone de « progressive hedging »), qui est une approche notoire de décom-

position de problèmes formulés sur des arbres de scénarios. Nous y décrivons dans un premier temps l'algorithme, les diverses interprétations qui y sont associées, ainsi que les résultats de convergence de la méthode. Nous y exposons également les conclusions issues des diverses expérimentations numériques précédemment effectuées, ainsi que des propositions d'heuristiques fournies par différents auteurs pour optimiser le comportement de l'algorithme. Dans un second temps, nous soumettons nos contributions théoriques liées à l'étude de la convergence de cette méthode ; il s'agit d'un résultat de convergence des multiplicateurs associés aux contraintes non-dualisées, ainsi que d'un contre-exemple à la convergence de l'algorithme si l'on fait varier itérativement son paramètre d'augmentation.

Nous produisons, dans la quatrième partie, les résultats numériques que nous avons obtenus suite à l'application de l'algorithme du recouvrement progressif à un problème réel de gestion de production d'électricité.

Pour finir, nous concluons ce manuscrit en nous intéressant à différentes perspectives d'extension de nos travaux.

1.2 Détail des contributions

Les contributions de cette thèse peuvent être décomposées suivant quatre axes.

D'une part, dans le chapitre 5 nous avons généralisé aux cas éventuellement non réalisables le résultat, issu de [Delbos et Gilbert, 2005], de convergence linéaire globale de l'algorithme du lagrangien augmenté pour résoudre un problème quadratique convexe. Un résultat similaire avait déjà été démontré pour la relaxation lagrangienne dans [Dean et Glowinski, 2006] en usant de techniques d'algèbre linéaire, mais dans le cas de problèmes strictement convexes sous contraintes d'égalité uniquement. Son développement pour le lagrangien augmenté dans le cas convexe - comprenant ainsi l'optimisation linéaire - sous contraintes d'inégalité a quant à elle nécessité le recours à l'analyse convexe. Notre résultat conduit à une règle de paramétrage qui est indépendante de la réalisabilité du problème à résoudre, et qui permet de contrôler numériquement le comportement de l'algorithme. Il donne également lieu à une généralisation du critère d'arrêt de l'algorithme ; lorsque le nouveau critère est satisfait, on a alors la garantie de connaître précisément la valeur du décalage à effectuer pour rendre le problème réalisable (cette valeur est ainsi nulle si le problème est déjà réalisable).

D'autre part, au chapitre 7, nous avons construit un contre-exemple mettant au jour l'éventuelle non-convergence de l'algorithme du recouvrement progressif si l'on fait varier itérativement son paramètre de pénalisation, et ce même en limitant ce dernier à un compact de l'ensemble des réels strictement positifs.

Dans ce même chapitre, nous avons également démontré, dans le cas convexe, la convergence des multiplicateurs associés aux contraintes non dualisées des problèmes internes de l'algorithme du recouvrement progressif vers les multiplicateurs associés aux contraintes correspondantes sur l'arbre. Pour obtenir un tel résultat il nous a fallu, au préalable, établir scrupuleusement les liens existants entre les problèmes formulés sur un arbre et sur le peigne correspondant (c'est-à-dire l'arbre décomposé en scénarios indépendants). Il s'agit d'un résultat aux forts enjeux dans le cadre de l'application du recouvrement progressif à un problème de gestion de production d'électricité, du fait de l'importance industrielle de certains de ces multiplicateurs, qui correspondent aux « coûts marginaux » de l'électricité (dont on fournira une définition précise au chapitre 2).

Enfin, au chapitre 8, nous faisons valoir la possibilité d'utiliser, dans un cadre industriel, l'algorithme du recouvrement progressif pour résoudre un problème de gestion de production d'électricité. Nous avons ainsi suggéré une mise à l'échelle des contraintes, dont l'efficacité a été mise en évidence empiriquement. En outre, nous avons exposé, en utilisant des jeux de données de tailles réelles, l'intérêt d'une décomposition par scénarios par rapport à une approche de décomposition par unités de production, qui est celle actuellement utilisée dans les modèles opérationnels. Nous avons ainsi obtenu, pour des problèmes de grandes dimensions, une meilleure précision sur le calcul des coûts

1.2. DÉTAIL DES CONTRIBUTIONS

marginaux par l'algorithme de recouvrement progressif que par l'actuel outil industriel, qui utilise une décomposition par unités de production et non par scénarios.

Chapitre 2

La gestion de production d'électricité

Ce premier chapitre a pour vocation d'introduire les problématiques complexes inhérentes à la gestion de production d'électricité, qui constitue le cadre de l'application industrielle de cette thèse. Les informations qui s'y trouvent ont été en partie recueillies lors de la formation interne [[Formation GesProd, 2011](#)].

2.1 Portée

2.1.1 Cadre industriel

2.1.1.1 Présentation du Groupe EDF

Premier producteur d'électricité à l'échelle européenne, le Groupe EDF fait partie des premiers groupes mondiaux du secteur de l'énergie. Ainsi, en 2010, EDF a produit 630,4 TWh d'électricité et fourni 37 millions de clients dans le monde. Pour se maintenir à un tel niveau de compétitivité, les activités des agents du Groupe doivent être étendues à un vaste panel des métiers de l'énergie. En outre, une volonté constante d'innovation a conduit EDF à investir une partie non négligeable de ses ressources dans sa division Recherche & Développement.

2.1.1.2 Rôle de la division R&D d'EDF

La division R&D d'EDF offre un large éventail de possibilités quant aux thèmes de recherche qui y sont traités. Ceux-ci portent sur la production, le management d'énergie, les réseaux électriques, le développement commercial, les énergies renouvelables et les technologies de l'information. La production est le thème qui mobilise la plus grande part des ressources de la R&D d'EDF ; celui-ci concerne, par exemple, les recherches sur l'allongement de la durée de vie des centrales nucléaires, sur le captage et le stockage du CO₂, sur la sûreté et les performances du parc en exploitation, sur l'érosion des ouvrages hydrauliques, ...

2.1.1.3 La mission du département OSIRIS

Le département OSIRIS (Optimisation, Simulation, Risque et Statistiques pour les Marchés de l'Énergie) axe plus particulièrement ses travaux sur le *management d'énergie*, c'est-à-dire sur la gestion optimisée de la production à court, moyen et long termes, dans une perspective d'adaptation régulière des outils opérationnels d'administration du parc de production aux évolutions du contexte législatif et commercial. La prévision de consommation, ainsi que la gestion du risque, sont également deux voies majeures de recherche du département.

2.1.2 Enjeux

En France, en 2010, l'énergie produite par le Groupe EDF a été de 476,3 TWh, dont 85,6% par des ressources nucléaires, 9,7% d'origine hydraulique, et 4,5% (hors gaz) par les unités thermiques qui ne sont pas nucléaires - que l'on qualifie d'unités *thermiques à flamme* ou encore *thermiques classiques*. La complexité et la grande diversité du parc, avec ses 58 tranches nucléaires et ses 42 vallées hydrauliques (où sont installées 440 centrales) auxquelles s'ajoutent les 35 centrales thermiques à charbon, au fioul et au gaz, ainsi que de nouvelles sources d'énergie renouvelable (éolien, solaire, géothermie, biomasse, marées, ...), requièrent une gestion dynamique et organisée du système électrique.

2.1.2.1 Définition de l'équilibre offre-demande

Les objectifs impératifs pour le Groupe EDF sont d'assurer à la fois le fonctionnement et la sûreté du système électrique en France. Ainsi, il s'agit de maintenir ce que l'on appelle *l'équilibre offre-demande*, c'est-à-dire qu'à chaque instant et dans chaque pays, la consommation intérieure ajoutée aux exportations doit être égale à la production intérieure, cela en satisfaisant les contraintes liées au réseau de transport ou au fonctionnement des centrales, et sans négliger les objectifs de la gestion économique du système (à savoir la minimisation du coût de production).

Remarque : Dans ce contexte, la production intérieure inclut les achats d'énergie.

2.1.2.2 Un équilibre soumis à des aléas

Cependant, un certain nombre d'aléas rendent cet équilibre incertain. Ainsi, on rencontre des aléas affectant la demande, tels que la température, la nébulosité ou la conjoncture économique. D'autres aléas peuvent également influencer l'offre, comme la *profondeur du marché* - c'est-à-dire les capacités maximales d'achats et de ventes, l'hydraulicité ou les pannes, désignées comme des *indisponibilités fortuites*. Et il faut de plus prendre en compte des aléas financiers, par exemple le prix des combustibles ou les prix de l'électricité sur le marché.

Du fait de ces aléas, l'équilibre offre-demande est soumis à des risques de deux natures, qualifiés de « risque physique » et de « risque financier ».

2.1.2.3 Risque physique et marge d'exploitation

Le *risque physique* a trait à la possibilité de ne pas pouvoir satisfaire la demande à un instant donné. Dans un tel cas de figure, il est nécessaire de faire appel à des moyens exceptionnels, comme le *délestage* (c'est-à-dire des coupures). Pour se prémunir contre un tel risque, une marge, dite « marge d'exploitation » est nécessaire.

Définition 2.1. La *marge d'exploitation* à un instant t est l'écart entre la production maximale susceptible d'être mobilisée à l'instant suivant $t + 1$ et la prévision de demande pour ce même instant $t + 1$.

Une telle marge est calculée à partir d'un niveau de risque jugé acceptable : le *risque 1%*.

Définition 2.2. Le *risque 1%* est la marge nécessaire pour que la probabilité de recourir à des moyens exceptionnels soit égale à 1 %. La marge doit être supérieure au risque 1%.

On satisfait la marge d'exploitation à l'aide de différents types de réserves, que l'on peut mobiliser plus ou moins rapidement :

la **réserve primaire** : régulation automatique de la puissance des centrales en fonction de la fréquence instantanée sur le réseau ^{1 2},

la **réserve secondaire** : régulation automatique de la puissance des centrales en fonction d'une fréquence moyennée et de l'écart à la prévision d'échanges du pays,

la **réserve tertiaire** : réserve non automatisée, obtenue en changeant la puissance de consigne des centrales.

2.1.2.4 Le marché et le risque financier

Il existe deux types de marchés.

Le marché SPOT : Il s'agit d'échanges de blocs d'énergie du jour même pour le lendemain, organisés par des bourses.

Les marchés à terme : Il s'agit également de transactions d'énergie, mais quant à elles négociées de gré à gré, pour des échéances plus éloignées (jusqu'à plusieurs années).

Pour les différents acteurs, le *risque financier* est directement lié aux mouvements constatés sur les marchés financiers. Il peut par exemple s'agir des risques liés à la volatilité des prix, des risques de contrepartie (lorsqu'un contractant ne s'acquitte pas de son engagement d'achat ou de vente d'énergie), des risques de variations de taux d'intérêt, des risques de change, ...

2.2 Principes de base

2.2.1 Un parc varié, des ressources complémentaires

Le parc dont dispose EDF comporte des moyens de production aux caractéristiques complémentaires :

la **production « fatale »** : dont on n'a pas la maîtrise (par exemple les usines hydrauliques placées au fil de l'eau, l'éolien, les obligations d'achats, ...),

le **nucléaire** : peu flexible, mais peu coûteux en combustible,

le **thermique à flamme** : plus flexible, mais plus coûteux,

l'**hydraulique** : ressource très peu coûteuse et très flexible, mais en quantité limitée.

2.2.2 L'empilement et les coûts marginaux

À chaque instant, l'optimum dans la réalisation de l'équilibre entre l'offre et la demande peut être atteint en « empilant » la production des unités disponibles par ordre de coûts croissants, jusqu'à satisfaire la demande. La notion de *coût proportionnel de production* de chaque unité joue ainsi un rôle crucial dans l'optimisation du système. Pour les centrales dont le stock de combustible peut être considéré comme non contraint, ce coût peut être assimilé au coût du combustible lui-même, augmenté des charges d'exploitation proportionnelles. Par contre, dès lors qu'il existe des contraintes sur le stock (comme c'est le cas pour les réserves hydrauliques, les centrales nucléaires, les centrales émettrices de CO₂, ...), ce coût doit tenir compte de ces contraintes et s'apparente alors à une « valeur d'usage » (dont on fournira une définition plus précise au paragraphe 2.2.5.3), beaucoup plus difficile à évaluer. En environnement de marché, il faut également intégrer les achats et les ventes

1. Ainsi, toute variation du bilan offre-demande est compensée par un écart de fréquence, mais cette régulation est limitée pour éviter des variations de puissance trop importantes que le matériel ne pourrait pas supporter.

2. La réserve primaire est utilisée par les gestionnaires de réseaux des différents pays pour assurer l'équilibre du réseau à l'échelle européenne. Elle n'est donc pas utilisable directement pour l'équilibre du réseau national et ne fait pas partie à proprement parler de la marge d'exploitation.

à cet empilement. Ainsi, l'on achète si l'on trouve un bloc d'énergie moins cher qu'un des moyens de production disponibles nécessaires à la satisfaction de la demande. Et l'on vend à un prix supérieur au moyen de production utilisé (ou à l'achat réalisé) le plus cher.

Définition 2.3. Le *coût marginal* de production en un instant, et pour un état donné de l'équilibre offre-demande, est le coût nécessaire à la production d'une unité supplémentaire de demande (en général 1 kWh ou 1 MWh) d'électricité.

Par exemple, le coût marginal peut correspondre au coût proportionnel de l'unité démarrée la plus chère, si elle ne produit pas à puissance maximale.

Mathématiquement, dans le problème d'optimisation se rapportant à l'empilement, le coût marginal correspond à une variable duale, c'est-à-dire au multiplicateur de Lagrange, associée à la contrainte de satisfaction de la demande. En ce sens, le coût marginal du système d'équilibre offre-demande peut également être vu comme un prix de rémunération de la production, permettant à chaque unité de décider indépendamment des autres de son niveau de production optimal, en le comparant à son coût de production propre ou à sa valeur d'usage.

Ainsi, les coûts marginaux constituent une information essentielle pour EDF afin de faire un choix parmi les différents moyens de production à disposition. C'est la raison pour laquelle nous étudierons, à la partie IV, la possibilité d'en obtenir un calcul plus précis que celui effectué par certaines méthodes actuellement utilisées par EDF.

2.2.3 La gestion des réserves système

Définition 2.4. *RTE (Réseau de Transport d'Électricité)* est l'entité filiale d'EDF qui gère le réseau public de transport d'électricité français. RTE est responsable de l'exploitation, de l'entretien et du développement du réseau, et doit y assurer un accès non discriminatoire à tous les utilisateurs, tout en maintenant la sûreté du système électrique.

Comme on l'a vu au paragraphe 2.1.2.3, pour faire face aux écarts par rapport aux prévisions de consommation et de production, chaque producteur dispose de réserves dont RTE requiert une certaine quantité. Les objectifs de satisfaire les prescriptions de réserve s'ajoutent alors à l'objectif de satisfaire sa propre demande. En outre, cela induit une désoptimisation de l'empilement et une augmentation du coût de production. En effet, le maintien de réserves primaires et secondaires exige de diminuer la puissance de certains groupes. De plus, des groupes thermiques supplémentaires doivent être démarrés à puissance minimum pour pouvoir fournir de la réserve tertiaire en cas de besoin. Enfin, certaines usines hydrauliques doivent rester disponibles (donc ne pas être utilisées) pour pouvoir constituer une réserve rapide.

2.2.4 Les groupes thermiques à flamme

2.2.4.1 Contraintes de fonctionnement

Il existe de très nombreuses contraintes pesant sur le fonctionnement de ces centrales, comme par exemple des contraintes de durée minimum de fonctionnement à des paliers de puissance fixés, de durée minimum de marche ou d'arrêt, de nombre maximum de baisses de puissance ou de démarrages sur des périodes données, ...

2.2.4.2 Coûts de production

Le coût de production d'un groupe thermique à flamme se décompose en trois postes :

- un coût de démarrage** fonction de la durée de l'arrêt précédent,
- un coût fixe** indépendant de la puissance générée,

un coût proportionnel à multiplier par la puissance générée.

Ces coûts sont liés aux prix des combustibles et aux quotas restant de CO₂ à utiliser. Ils varient également en fonction des caractéristiques des tranches. Il existe en outre d'autres coûts liés à la maintenance et à la main d'œuvre.

2.2.5 Les tranches nucléaires

2.2.5.1 Notion de modulation

Définition 2.5. La *modulation* réalisée à un instant donné par une unité de production est l'écart par rapport au fonctionnement à sa puissance maximale disponible.

Compte tenu de la puissance installée du parc nucléaire français, il arrive que la demande soit inférieure à la totalité de la production nucléaire disponible ; il faut dans ce cas choisir certaines tranches qui ne produiront pas au maximum ou seront arrêtées. On parle alors de *modulation fatale* pour ces tranches. La participation aux réserves système imposée au producteur par le gestionnaire du réseau de transport RTE, ou encore les pannes fortuites, constituent d'autres exemples de modulation fatale.

La modulation peut également être *volontaire*, si elle est décidée dans le cadre d'une stratégie d'optimisation consistant à économiser du combustible pour le futur.

2.2.5.2 Contraintes de fonctionnement

On retrouve, pour les centrales nucléaires, le même type de contraintes que celles évoquées pour les centrales thermiques à flamme, avec en outre de nombreuses contraintes supplémentaires liées à la sûreté et aux modes spécifiques de fonctionnement de ces unités. Par exemple, la puissance maximale disponible d'une centrale nucléaire dépend de son stock et baisse selon un profil imposé à partir d'un seuil donné d'épuisement du combustible en cœur. Une fois ce seuil atteint, la centrale ne peut plus moduler et doit impérativement suivre cette consigne de puissance.

En outre, chaque tranche subit des rechargements en combustibles périodiques au cours desquels elle est indisponible (pendant une durée variable de 35 à 100 jours, suivant le type d'arrêt).

2.2.5.3 Gestion des stocks

Il est important de bien gérer ces niveaux de stock, pour éviter l'indisponibilité des centrales avant le rechargement prévu, de diminuer les pertes de puissance en fin de cycle, ou d'optimiser les dates d'arrêts elles-mêmes.

Cette gestion repose sur un arbitrage économique entre le gain que procurerait l'utilisation immédiate du combustible en cœur et celui qu'il pourrait procurer dans le futur. En pratique une telle économie de combustible est réalisée en baissant la puissance de la centrale, c'est-à-dire en la faisant moduler. Pour réaliser cet arbitrage, on calcule, pour chaque niveau de stock de chaque centrale et à chaque instant, une valeur de Bellman dont on déduit une « valeur d'usage ».

Définition 2.6. La *valeur de Bellman* d'un niveau de stock à un instant donné est le gain futur obtenu en utilisant cette énergie de manière optimale (au sens d'un critère donné) à partir de cet instant jusqu'à la fin de la période d'étude.

La *fonction de Bellman* est la fonction qui, à un niveau de stock et à un instant donnés, associe la valeur de Bellman correspondante.

Définition 2.7. La *valeur d'usage* d'un niveau de stock à un instant donné est le gain futur procuré par une unité supplémentaire d'énergie disponible à cet instant. Mathématiquement, il s'agit alors simplement de la dérivée de la fonction de Bellman par rapport au niveau de stock.

En pratique, les valeurs de Bellman sont calculées en valorisant la production future de chaque centrale par les coûts marginaux qui sont, pour ce calcul, assimilés au prix de rémunération de la production de chaque unité, comme nous l'avons évoqué au paragraphe 2.2.2.

2.2.5.4 Coût de production

Une centrale étant gérée à partir de valeurs d'usage, comme cela est indiqué ci-dessus, on considère son coût proportionnel de production instantané comme nul sur la période d'étude. Celui-ci n'est utilisé que pour valoriser le stock résiduel en fin de période, qui résulte de la stratégie de gestion utilisée.

2.2.6 La production hydraulique

Hormis le coût d'exploitation des centrales, l'eau ne « coûte rien ». On l'utilise donc à la place des moyens de production les plus chers, classiquement pour satisfaire la demande aux *heures de pointes*, c'est-à-dire aux moments où celle-ci est la plus forte. Cependant, l'eau étant en quantité limitée, et les réserves étant sujettes aux aléas (dus par exemple à des apports liés à la pluviométrie ou à la fonte des neiges), on doit, comme pour les centrales nucléaires, arbitrer à chaque instant entre utiliser l'eau disponible ou la garder pour plus tard. La gestion des réserves hydrauliques est donc également réalisée à partir de valeurs d'usage, appelées dans ce cadre *valeurs de l'eau*.

2.2.7 Des visions à plus ou moins long terme

La production doit être gérée en prenant en compte les aléas pour assurer, à moindre coût, l'équilibre offre-demande dans le futur, mais également en considérant les besoins immédiats. Ainsi, plusieurs visions du problème, à plus ou moins long terme, sont nécessaires et plus la vision englobe une période temporelle longue, plus la description des aléas jouera un rôle important.

2.3 Différentes perspectives

2.3.1 Le long-terme

Puisque la demande en électricité évolue dans le temps, la structure du parc de production doit s'y adapter et se développer. Il s'agit donc de prendre des décisions d'investissements, c'est-à-dire de construire de nouvelles centrales. L'horizon de temps débute deux ou trois ans après l'instant présent (ce qui correspond à la durée de construction d'une centrale), et court jusqu'à 25 ans plus tard, ce qui permet de prendre en compte la durée de vie des centrales. Il est nécessaire de trancher entre des centrales exigeant des coûts de construction (et de démantèlement) très élevés mais assurant un faible coût de production, comme le nucléaire de troisième génération, et celles présentant les caractéristiques opposées, telles que les cycles combinés gaz.

Pour modéliser les aléas pouvant influencer les décisions, quatre scénarios assez différents sont construits chaque année pour représenter les différentes possibilités d'évolution de la conjoncture économique. Le problème considéré est de grande taille, notamment du fait des interconnexions entre les différents pays européens.

2.3.2 Le moyen-terme

Il s'agit d'anticiper les décisions optimales pour assurer l'équilibre offre-demande à moindre coût, sur un horizon supérieur au mois courant et allant jusqu'à 5 ans. Plus précisément, il est nécessaire de fixer les arrêts des tranches nucléaires, d'élaborer des stratégies de gestion des stocks, de faire des mesures des risques physiques et financiers, et de définir les actions de couvertures en conséquence.

Remarque : Nous détaillons ici particulièrement les problématiques liées à l'horizon moyen-terme, car il s'agit du cadre de l'application industrielle de cette thèse, présentée à la partie IV.

L'offre est modélisée par des groupes thermiques individualisés (soumis à des contraintes de limitation de polluants), des réservoirs hydrauliques agrégés en 3 réserves fictives : le « Lac France » regroupant toutes les grandes réserves, le « Pompage Saisonnier » et le « Pompage Hebdomadaire », des options tarifaires (contrats d'« effacement » à puissance variable, soumis à des contraintes d'utilisation) et des services systèmes divisés d'une part en « téléreglage » (réserves primaire et secondaire) et d'autre part en réserve tertiaire.

Définition 2.8. L'*effacement de consommation électrique* consiste à réduire la consommation d'un site donné. Il existe des *contrats tarifaires d'effacement* passés entre EDF et certains industriels, qui bénéficient ainsi de prix amoindris, à condition de ne pas utiliser d'électricité (ou alors à un coût très élevé) 22 jours de l'année choisis par EDF.

Définition 2.9. Le *pompage* est une technique de stockage de l'énergie électrique ; elle repose sur le principe de pomper de l'eau (ce qui consomme de l'électricité) lorsque la demande est faible, pour la stocker et la turbiner plus tard, lorsque la demande aura sensiblement augmenté.

Le pompage peut être *saisonnier* pour permettre des transferts d'énergie saisonniers, de manière à passer les pics de consommation, ou *hebdomadaire*, pour gérer les heures de pointes et les écarts de demande entre les jours ouvrés et le week-end.

L'horizon de temps du moyen-terme s'étend de un mois à cinq ans. Dans les applications auxquelles nous nous sommes intéressés dans le cadre de cette thèse, l'incertitude sur cet horizon est représentée par des croisements de scénarios d'aléas. Plus précisément, les scénarios construits dépendent de :

la demande à partir de scénarios de températures et d'une prévision de consommation,

l'hydraulicité qui comporte des scénarios d'apports pour le Lac France et le Pompage Saisonnier (construits à partir d'historiques et de prévisions annuelles), ainsi que des scénarios de production hydraulique fatale,

la disponibilité des tranches thermiques qui concerne les indisponibilités fortuites (générées par exemple par une chaîne de Markov à deux états : tranche en fonctionnement ou non), les prolongations d'arrêt des centrales nucléaires et les limitations de puissance imposées à ces centrales par les conditions environnementales (par exemple pour limiter l'augmentation de température de la source froide).

les achats et les ventes sur le marché Spot modélisés par des groupes de production fictifs.

En pratique, les réserves hydrauliques sont optimisées en amont avec une vision simplifiée du parc. Puis une simulation globale est effectuée sur chaque scénario, au cours de laquelle on minimise une fonction objectif qui est la somme des coûts de production, d'achat et de vente, sous les contraintes d'équilibre offre-demande, les contraintes techniques et celles assurant le suivi des stocks hydrauliques. On obtient ainsi des scénarios d'équilibre offre-demande, à partir desquels on construit les indicateurs de la gestion à moyen-terme. Plus précisément, ces indicateurs sont les bilans énergétiques par type de combustible, les coûts marginaux, les indicateurs de risque financier, et le risque 1%.

La gestion de production à moyen terme prépare la gestion hebdomadaire.

2.3.3 L'hebdomadaire

Il s'agit d'optimiser les moyens de production et d'effacement de consommation sur environ deux semaines pour assurer la satisfaction de la demande à moindre coût. Cela permet de garantir le respect des critères imposés par les politiques de risque, et de contribuer à l'anticipation des situations de crise.

En outre, la gestion de production hebdomadaire fournit des indicateurs pour préparer l'optimisation journalière, tels qu'une politique de gestion de l'hydraulique, des stratégies pour les effacements, ainsi que la transmission de barèmes pour les centrales thermiques classiques et nucléaires.

2.3.4 Le journalier

L'objectif de la gestion journalière est la construction de programmes de référence pour le lendemain à fournir à RTE : il s'agit de plannings de production ainsi que d'offres d'ajustement (fournitures en réserves primaire et secondaire).

Ainsi, trois demandes sont prises en comptes, sous la forme de contraintes couplantes, et on minimise sur deux jours une fonction objectif somme des coûts de production et de démarrage thermique, de la valeur de l'eau et de la pénalisation des écarts entre la production et la demande.

2.3.5 L'infra-journalier

Il s'agit de ré-optimiser la production en prenant en compte l'évolution des différents aléas cités précédemment, ainsi que ceux affectant le réseau. Plus précisément, il peut s'agir de pertes d'éléments du réseau, de pertes de groupes de production, de congestions sur le réseau ou d'erreurs dans la prévision de consommation.

RTE fait appel aux offres d'ajustement des différents acteurs pour mobiliser la réserve disponible en cas de besoin ; c'est le mécanisme d'ajustement.

Chapitre 3

L'optimisation stochastique sur arbres de scénarios

Comme nous l'avons décrit au chapitre 2 précédent, la gestion de production d'électricité suscite la résolution d'un problème complexe. Il comporte d'une part un grand nombre de variables, tant en raison de la multiplicité des pas de temps qui partitionnent la période d'étude que de celle des unités de production à considérer. Ces unités sont d'autre part assujetties à des contraintes très diversifiées. Enfin, le problème contient une forte dimension stochastique en raison des multiples aléas dont il faut se préoccuper.

Les méthodes envisagées pour résoudre de tels problèmes, notamment ceux qui ont trait à la gestion de production d'électricité à moyen terme, appartiennent alors tant à la classe dite des « grands problèmes » qu'à celle de l'optimisation stochastique. En particulier, une stratégie fréquemment envisagée est de discrétiser les aléas sous forme d'arbres sur lesquels le problème est formulé. Comme on le verra plus précisément au paragraphe 6.2.2 du chapitre 6, une telle structure d'arbre permet, avec une approximation discrète des aléas, de conserver le caractère « non anticipatif » des problèmes.

Dans ce chapitre introductif à l'optimisation stochastique sur arbres de scénarios, nous présentons une brève revue de différentes méthodes de construction des arbres de scénarios ainsi que de diverses approches de résolution spécifiques aux problèmes formulés sur des arbres. Cette revue n'est cependant pas exhaustive, car l'étude des problématiques liées à la construction des arbres n'étaient pas spécifiquement l'objet de cette thèse. Dans le cadre de l'application numérique présentée à la partie IV, nous avons en effet considéré l'arbre de scénarios comme une donnée d'entrée du problème.

3.1 Les arbres de scénarios

3.1.1 Formulation d'un problème stochastique multi-étapes

On s'intéresse à la résolution d'un problème stochastique multi-étapes. On se place dans le cadre d'un processus stochastique non anticipatif $w = \{w_1, \dots, w_T\}$, dont on note T le nombre d'étapes.

Remarque : Les étapes d'un tel problème ne correspondent pas nécessairement à des périodes temporelles ; il s'agit d'étapes du processus de décision, c'est-à-dire liées à la possibilité d'effectuer un arbitrage en se basant sur la mise à jour d'informations.

Définition 3.1. Le processus $w = \{w_1, \dots, w_T\}$ est dit *non anticipatif* si, à chaque étape, les variables de décision ne dépendent que des décisions précédentes et des observations du passé mais pas du futur.

Le problème consiste à choisir un vecteur de décisions $x = (x_1, \dots, x_T)$ tel que x vérifie les contraintes et soit non anticipatif. En général, lors de la résolution d'un tel problème, on s'intéresse

en particulier à la décision à prendre au cours des premières étapes ; les décisions des étapes suivantes gagneront à être adaptées au comportement effectif des variables aléatoires considérées.

Remarque : Un problème stochastique multi-étapes peut également être formulé à partir de l'évaluation récursive d'une suite de problèmes imbriqués à deux étapes, pour lesquels la non-anticipativité est prise en compte de manière implicite, comme cela est précisé dans [Dupačová et col., 2000, formule (4)].

3.1.2 Enjeux

En général, on ne peut pas résoudre directement un problème stochastique multi-étapes dont la distribution de probabilité est continue (sauf dans le cas de problèmes linéaires quadratiques gaussiens, comme cela est décrit dans [Quadrat, 2007]). C'est pourquoi on l'approche par une distribution discrète comportant un nombre restreint de scénarios. On résout donc un problème approché qui consiste à minimiser le même critère, mais sur un arbre de scénarios. Cette approche est désignée (entre autres par [Shapiro, 2006]) du nom d'« approximation par une moyenne d'échantillons », c'est-à-dire que l'on minimise sur l'arbre la moyenne - éventuellement pondérée - des critères sur chaque scénario.

3.1.3 Caractéristiques

Les arbres générés doivent, avec les probabilités associées à leurs scénarios, constituer une approximation discrète de la distribution de probabilité initiale. Ils doivent en outre être déterministes au cours de leur première période. Nous caractérisons un scénario ainsi qu'un arbre de scénarios de la manière suivante.

Définition 3.2. On appelle *scénario* une réalisation possible de différents aléas pendant une période donnée, éventuellement décomposée en pas de temps.

Définition 3.3. Deux scénarios sont dits *confondus* en un pas de temps si, en ce pas de temps, ils présentent les mêmes réalisations de leurs aléas.

Définition 3.4. Un *arbre de scénarios* est un ensemble de scénarios comportant le même nombre de pas de temps et qui vérifient les conditions suivantes : tous les scénarios sont confondus au premier pas de temps et, si deux scénarios sont confondus à un pas de temps ultérieur t donné, ils le sont également à tous les pas de temps précédents.

Définition 3.5. On définit un *nœud* d'un arbre de scénarios comme un point correspondant à un pas de temps et à l'ensemble des scénarios confondus à ce pas de temps.

Un arbre de scénarios peut être représenté par un nombre fini de nœuds ; chaque nœud a alors un prédécesseur unique, mais éventuellement plusieurs successeurs.

Définition 3.6. On exprime qu'il y a un *branchement* en un nœud quand celui-ci possède plusieurs nœuds fils. Par extension, on dit qu'un arbre *branche* en un nœud quand on y repère un branchement.

L'arbre commence au nœud racine, puis branche (éventuellement) à la période suivante. Il peut y avoir des branchements jusqu'aux nœuds de la dernière période, dont le nombre correspond au nombre de scénarios. Ainsi, en un nœud donné, il existe plusieurs futurs possibles, ce qui confère à un arbre un caractère non anticipatif. Comme nous le verrons en détail au chapitre 6 (paragraphe 6.2.2), cette non-anticipativité peut s'exprimer par l'identité des commandes en les pas de temps où les scénarios sont confondus. Pour fournir une bonne vision du futur, un arbre devrait cependant en théorie posséder une infinité de branchements, ce qui constitue une des limites de l'approximation d'une distribution de probabilité par un arbre de scénarios.

3.1.4 De l'arbre au peigne

On définit ici la notion de « peigne », associée à celle d'arbre de scénarios, dont nous nous servons dans les parties III et IV de ce manuscrit.

Définition 3.7. Un *peigne* est un ensemble de scénarios considérés séparément.

Ainsi, si l'on décrit l'ensemble des scénarios d'un arbre sous la forme d'un peigne, on perd le caractère non anticipatif de la représentation des aléas ; en effet, dans ce cas, chaque scénario a un unique futur, indépendamment des autres.

3.2 Construction des arbres de scénarios

3.2.1 Difficultés potentielles

3.2.1.1 Spécifications à définir

La construction d'un arbre de scénarios représentatif d'une distribution de probabilité donnée reste un problème délicat et complexe. Il est nécessaire de choisir le nombre d'étapes à considérer, ainsi que le schéma de branchement (c'est-à-dire de déterminer le nombre de branchements et le nombre de scénarios sur lesquels ils débouchent). Il faut en outre estimer la particularité - et la difficulté inhérente - des scénarios que l'on souhaite construire. Par ailleurs, la distribution de probabilité n'est pas toujours précisément connue.

Bien que certaines méthodes de décomposition - présentées à la section 3.3 - exploitent efficacement les structures d'arbre, le temps de calcul pour résoudre des problèmes d'optimisation sur des arbres dépend généralement du nombre de scénarios ou de nœuds. Un bon compromis est donc nécessaire entre temps de calcul et représentativité de la distribution de probabilité.

3.2.1.2 Caractéristiques d'un « bon » arbre

L'arbre construit doit certes refléter suffisamment la distribution de probabilité et les données existantes, mais il est également essentiel de l'adapter au problème à résoudre ; un certain nombre d'articles insistent ainsi sur le lien qui doit être maintenu entre l'arbre de scénarios et le critère que l'on souhaite minimiser dessus (en particulier [Kaut et Wallace, 2007]) ; l'article [Dupačová *et col.*, 2000] précise en effet qu'un arbre constituant une bonne approximation d'une distribution peut néanmoins conduire à de mauvaises estimations d'objets dépendant de cette distribution. À l'avenant, dans l'article [Høyland et Wallace, 2001], la qualité d'un arbre est évaluée à partir de la stabilité de la valeur de la fonction objectif minimisée. L'article [Pflug, 2001], quant à lui, définit une erreur d'approximation comme la différence entre la valeur optimale du problème initial et celle trouvée à partir de la solution du problème approché. Davantage de précisions à ce sujet sont fournies au paragraphe 3.2.4.

Il est en outre crucial de préciser la notion de représentativité d'une distribution de probabilité par un arbre de scénarios. Dans ce but, on utilise généralement une norme pour évaluer la distance entre deux distributions. Certaines méthodes de génération d'arbres de scénarios sont ainsi basées sur la minimisation d'une telle norme (comme c'est le cas dans [Høyland et Wallace, 2001]). Pour s'assurer une bonne représentativité de la distribution par l'arbre, le nombre de scénarios doit par ailleurs être suffisamment élevé.

3.2.2 Une distribution de probabilité initiale

A priori, une méthode de construction d'arbres de scénarios s'appuie sur une distribution continue (éventuellement d'horizon infini) de probabilité, de laquelle il est souhaitable de s'approcher.

Cependant, un certain nombre d'auteurs (par exemple ceux de [Dupačová *et col.*, 2000]) supposent qu'ils disposent d'une distribution déjà discrétisée, et qui comporte un nombre fini de points.

Il existe également d'autres méthodes de construction d'arbres qui ne reposent pas sur une distribution de probabilité, mais qui exploitent des observations du passé comme des scénarios auxquels on assigne des poids (ou probabilités d'occurrence). Les multiples données constituant ces scénarios prennent souvent la forme de séries temporelles corrélées, de tailles disparates et dont les durées des étapes sont distinctes¹. Cependant, des scénarios générés uniquement à partir du passé risquent de négliger certaines connaissances exogènes.

3.2.3 Méthodes de construction

Une méthode intuitive de construction d'arbres pourrait être celle dite « d'échantillonnage séquentiel », décrite par [Kouwenberg, 2001] : à chaque nœud de l'arbre, on échantillonne différentes valeurs du processus stochastique dont on souhaite obtenir une approximation discrète. Si l'on souhaite échantillonner un vecteur de valeurs aléatoires, on opère composante par composante, puis on combine les résultats. Cette approche occasionne cependant deux préjudices. D'une part, les composantes aléatoires ne sont ainsi pas corrélées ; pour pallier cet inconvénient, une possibilité est de n'échantillonner que les composantes principales - qui sont a priori choisies indépendantes. D'autre part, la taille de l'arbre croît exponentiellement avec la dimension du vecteur aléatoire.

On présente ici en détail la méthode de construction d'arbres utilisée dans l'outil de gestion de production d'électricité, appelé SOPRANO, qui a constitué la base de l'application industrielle (présentée partie IV) de cette thèse. On s'intéresse également à la méthode dite de « sélection forward » et « réduction backward », décrite au paragraphe 3.2.3.2, qui a été comparée à celle de l'outil SOPRANO, comme cela est résumé au paragraphe 3.2.5.

3.2.3.1 La méthode utilisée dans l'outil SOPRANO

L'outil de gestion de production d'électricité à moyen terme SOPRANO est un outil d'optimisation stochastique sur arbres de scénarios. La construction des arbres adaptés à cet outil est décrite dans la note [Romanet, 2003c], que l'on résume ici.

On considère en entrée des chroniques (éventuellement historiques) de valeurs des différents aléas dont le modèle tient compte. À partir de ces « chroniques d'aléas », un ensemble de scénarios est construit, qui constitue la distribution de probabilité discrète sur laquelle le problème d'optimisation de production est résolu ; la génération de ces scénarios consiste à agréger les chroniques, de manière à ce que la corrélation entre les aléas soit respectée. Cette première étape est illustrée sur la figure 3.1.

Il s'agit ensuite de transformer cet ensemble de scénarios en un arbre de taille réduite. La construction de l'arbre se base ici sur des agrégations de scénarios, dont il faut apprécier les distances les uns par rapport aux autres pour juger de l'opportunité ou non de les agréger. Pour cela, on définit une « norme » correspondant par exemple à l'estimation du coût de gestion futur sur le scénario considéré.

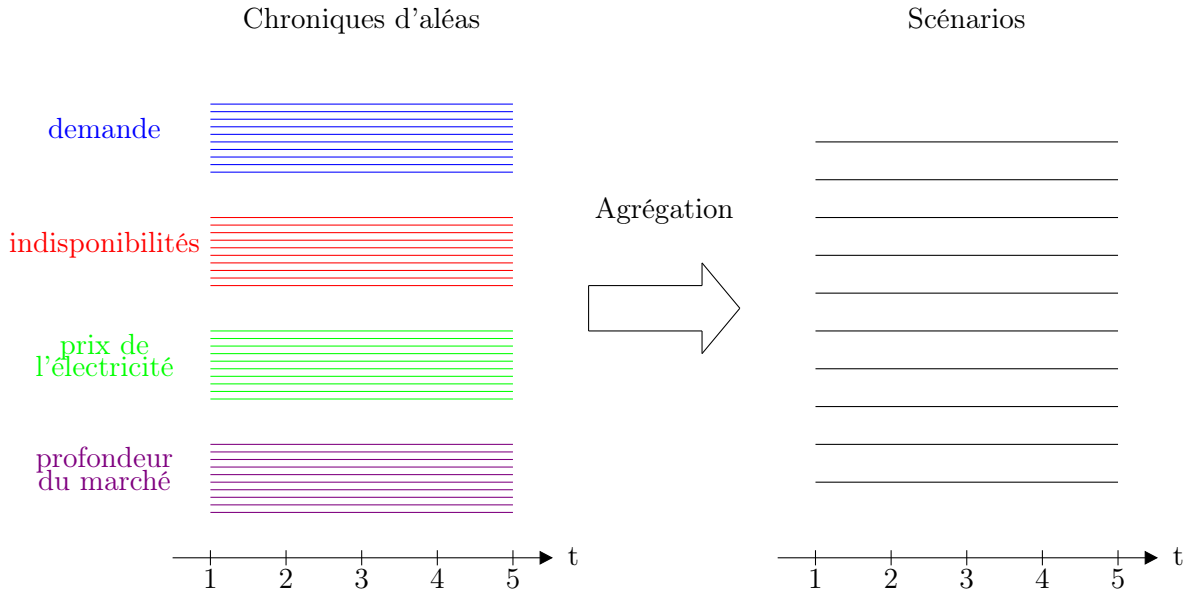
Remarque : Il ne s'agit pas ici d'une norme au sens mathématique, mais au sens d'une mesure de référence.

Pour une période donnée, les scénarios de normes suffisamment proches sont alors regroupés, et l'on choisit dans chaque groupe un scénario représentatif. Ce choix est fondé sur une estimation de la « dureté » des scénarios, qui doit être, pour le représentant du groupe considéré, aussi proche que possible d'une dureté définie par l'utilisateur. À la période suivante, il convient de définir si certains

1. Dans ce cas, la génération de scénarios fait appel à des outils statistiques, que l'on n'a pas étudiés ici.

3.2. CONSTRUCTION DES ARBRES DE SCÉNARIOS

FIGURE 3.1 – Première étape de la construction des arbres pour l’outil SOPRANO : des chroniques d’aléas aux scénarios



scénarios qui étaient dans un même groupe (à la période passée) doivent ou non être séparés, c’est-à-dire s’il doit y avoir branchement. Dans ce but, on calcule le nombre de sous-groupes issus du groupe de la période précédente à l’aide d’une formule dépendant des plus petite et plus grande normes des scénarios du groupe, de la durée de la nouvelle période, ainsi que d’un paramètre Δ appelé seuil de discrimination :

$$\text{NbSsGroupes} = \lceil (\text{NormeSup} - \text{NormeInf}) / (\text{durée} * \Delta) \rceil + 1.$$

Les scénarios sont au préalable triés par ordre croissant de normes, puis ceux dont les normes sont assez proches sont répartis dans les différents sous-groupes, ce qui permet une distribution relativement équitable des scénarios dans les groupes de chaque période. Par exemple, sur la figure 3.2, les groupes de scénarios de normes assez proches sont représentés par des cadres oranges, et l’on trouve dans chaque groupe un scénario représentatif, en gras.

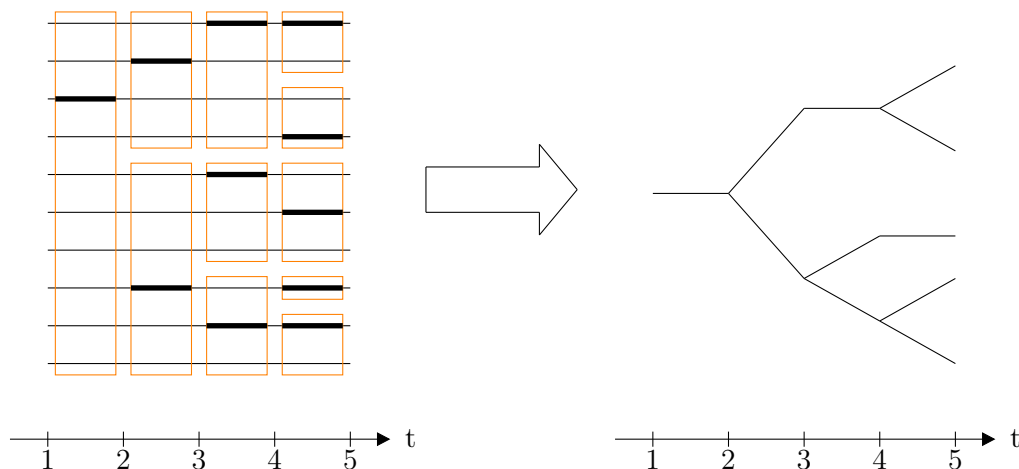
Remarques :

1. Tous les scénarios doivent être confondus lors de la première période. Comme il peut être délicat de sélectionner un seul représentant parmi tous les autres sur cette période (notamment si les scénarios présentent une forte hétérogénéité), il a été décidé d’imposer une durée très courte à cette première période, de sorte que ce choix ait un minimum d’impact.
2. En pratique, ce n’est pas directement Δ qui est paramétrable par l’utilisateur mais plutôt un nombre de nœuds approximatifs souhaité, à partir duquel est estimé le seuil de discrimination qui permettra d’atteindre cette quantité.

3.2.3.2 La méthode basée sur la réduction backward et la sélection forward

Dans les articles [Dupačová *et col.*, 2003, Heitsch et Römisch, 2003, Gröwe-Kuska *et col.*, 2004, Heitsch et Römisch, 2005] est présentée une approche basée sur le contrôle de la qualité de l’approximation de la distribution de probabilité par une distance de Kantorovich, de sorte que les valeurs et solutions optimales soient stables par des perturbations des mesures de probabilités.

FIGURE 3.2 – Deuxième étape de la construction des arbres pour l'outil SOPRANO : regroupement des scénarios à chaque période, en fonction de leurs normes, et sélection d'un scénario représentatif dans chaque groupe



Plus précisément, l'article définit une stratégie de réduction optimale du nombre de scénarios : il s'agit de rechercher le sous-ensemble de scénarios dont la distance avec la distribution initiale est minimale, c'est-à-dire de supprimer un ensemble de scénarios et de redéfinir les probabilités des scénarios conservés comme la somme de la probabilité initiale et des probabilités des scénarios supprimés les plus proches. Ce problème dit « de réduction optimale » se formule comme un problème de couverture d'ensemble, qui est NP-difficile.

L'heuristique proposée par l'article [Gröwe-Kuska *et col.*, 2004] repose sur l'étude de deux cas particuliers, consistant soit à ne supprimer qu'un seul scénario - c'est l'algorithme de « réduction backward », soit à n'en conserver qu'un unique - c'est l'algorithme de « sélection forward ». En effet, ces deux cas particuliers se trouvent être des problèmes beaucoup plus simples à résoudre que celui de réduction optimale. Ainsi, il suffit de répéter récursivement la suppression d'un scénario ou bien, si l'on travaille avec un petit nombre de scénarios, d'itérer la conservation d'un scénario. De cette manière, l'algorithme présenté dans [Dupačová *et col.*, 2003] réduit successivement le nombre de scénarios d'un ensemble de départ (constituant un « éventail », c'est-à-dire un arbre dont les scénarios ne sont reliés qu'au premier pas de temps) en les agrégeant suivant une technique de réduction ; l'arbre original est comparé aux arbres réduits (sur une période temporelle à laquelle on retire, à chaque itération, son dernier pas de temps) via la distance de Kantorovich, et les scénarios sont effectivement supprimés si cette distance s'avère suffisamment faible.

La complexité des algorithmes de réduction backward et de sélection forward est explicitement calculée dans [Heitsch et Römisich, 2003] ; un seuil est également fourni, en fonction du nombre de scénarios de départ et du nombre de scénarios désiré. Celui-ci permet de déterminer dans chaque cas laquelle des deux méthodes est la plus indiquée.

Les expérimentations numériques de [Dupačová *et col.*, 2003, Gröwe-Kuska *et col.*, 2004] ont mis en évidence que l'algorithme backward était légèrement plus rapide que l'algorithme forward, hormis pour un petit nombre de scénarios, ce qui confirme les analyses de complexité citées ci-dessus. Ainsi, dans le cadre d'une application à la gestion de production d'électricité en Allemagne, on constate qu'avec cette méthode, même si l'arbre de scénarios approché est de taille assez réduite, les valeurs optimales obtenues sont plutôt satisfaisantes. En outre, [Heitsch et Römisich, 2005] présente des résultats numériques issus de l'application de cet algorithme à un problème de gestion de production

français. Ses conclusions sont également favorables et précisent notamment que, même avec un arbre réduit comportant seulement 15 % des nœuds du peigne initial, on obtient une précision de l'ordre de 40 %. L'article [Dupačová *et col.*, 2003] montre même qu'une réduction de 50 % du nombre de scénarios ne génère une perte que de 10 % de la précision relative de la résolution.

Enfin, l'article [Heitsch et Römis, 2009] définit des conditions qui permettent d'assurer que la distance entre les valeurs optimales du problème résolu d'une part sur l'ensemble de scénarios initial, d'autre part sur l'arbre généré par cette approche, soit bornée.

3.2.3.3 Brève revue d'autres méthodes de construction

Les articles [Dupačová, 1995, Dupačová *et col.*, 2000] s'intéressent à une méthode dite de « contamination » dont le principe repose sur l'ajout de scénarios supplémentaires, suivant une distribution de probabilité qui « contamine » la distribution de probabilité initiale, de manière à obtenir une nouvelle distribution qui soit combinaison convexe des deux autres. La stabilité de la valeur optimale d'un problème par rapport au choix des scénarios représentatifs de la distribution de probabilité y est étudiée. En effet, lorsqu'on ne dispose pas de données suffisantes pour décrire les aléas ou, à l'inverse, quand la discrétisation de ces aléas génère un problème de taille trop importante pour qu'il soit résolu numériquement, il peut être souhaitable de chercher d'abord une solution sur un arbre restreint, quitte à enrichir ensuite l'information.

Les « méthodes de chemin », évoquées dans [Kaut et Wallace, 2007], commencent par générer des « chemins » complets (un chemin étant une partie de scénario, depuis une étape donnée jusqu'à la feuille correspondante de l'arbre) en évaluant le processus stochastique, ce qui produit un éventail de scénarios que l'on transforme en arbre par agrégation de ces derniers à chaque période. Par exemple, l'algorithme dit « d'échantillonnage séquentiel » est étudié dans les articles [Dupačová *et col.*, 2000, Dempster, 2006]. Il s'agit d'un processus itératif comportant trois étapes :

- une génération de scénarios sous forme d'arbre,
- une transformation de la formulation mathématique du problème à résoudre sur l'arbre en un programme stochastique sous une forme standard,
- une résolution du programme stochastique, qui fournit une estimation courante du critère sur l'arbre.

À chaque itération de l'algorithme, la structure d'arbre est alors mise à jour, avec ajout ou suppression de chemins. Au lieu d'utiliser un arbre généré en amont, il est ainsi possible d'échantillonner les scénarios au cours de la résolution du problème. À l'instar de celle présentée ici, les méthodes reposant sur ce principe peuvent être itératives ; à chaque itération, le problème est résolu sur l'arbre de scénarios courant, des scénarios sont ajoutés ou supprimés, puis le problème est de nouveau résolu sur le nouvel arbre, et ainsi de suite. L'article [Casey et Sen, 2005] propose ainsi une telle méthode, avec enrichissement de l'arbre de scénarios au fur et à mesure des itérations. Le procédé décrit dans [Chiralaksanakul et Morton, 2004] résout quant à lui des problèmes d'optimisation approchés sur des « sous-arbres », en les agrandissant itérativement par l'ajout progressif de pas de temps à la période d'étude.

K. Høyland et S. W. Wallace proposent dans [Høyland et Wallace, 2001] une méthode de discrétisation d'une distribution de probabilité, qui minimise une mesure de la distance entre des propriétés statistiques de cette distribution et son approximation discrète. Ces propriétés statistiques sont pondérées dans le critère à minimiser, en fonction de l'importance qu'on leur accorde. Les contraintes ne portent que sur les probabilités des nœuds de l'arbre (la somme des probabilités - positives - des nœuds associés à une même période doit valoir 1). Le problème résultant est non convexe (d'autant plus si les probabilités des scénarios font partie des variables) et est résolu par une heuristique ; la solution obtenue en est a priori une solution locale, ce qui est satisfaisant dans ce contexte. Cette approche est assez flexible, puisque les propriétés statistiques à spécifier ne sont pas limitées, et que

leur seule connaissance suffit (la distribution n'est pas nécessairement totalement connue).²

L'algorithme dit « de discrétisation optimale » de [Pflug, 2001] s'attache à minimiser une erreur d'approximation définie comme la différence entre la valeur optimale du problème initial et celle trouvée à partir de la solution du problème approché. Cette erreur est par essence difficile à calculer car a priori, on ne connaît pas la valeur optimale du problème initial ; cependant, il en existe une borne supérieure qui s'exprime comme le double de l'écart maximal entre la valeur de la fonction objectif sur la distribution de probabilité initiale et sa valeur sur l'arbre de scénarios. C'est cet écart maximal qui est minimisé par l'algorithme proposé.

3.2.4 Critères d'évaluation des méthodes de génération de scénarios

3.2.4.1 Minimisation d'une borne supérieure de l'erreur

Dans l'article [Pflug, 2001], on définit l'erreur d'approximation d'une distribution de probabilité par une distribution discrète (soit, dans notre cadre, un arbre de scénarios) par la différence entre les valeurs de la fonction objectif en les solutions optimales des problèmes réel et approché.

Remarque : On ne compare pas les solutions optimales, car différentes solutions peuvent mener à une même valeur de la fonction objectif.

Le calcul de cette erreur d'approximation étant en général délicat, on en estime une borne supérieure, qui dépend d'une constante de Lipschitz de la fonction objectif et de la distance entre la distribution et son approximation discrète. C'est cette borne que la méthode s'applique à minimiser. Cependant, la minimisation de la borne supérieure de l'erreur ne garantit pas d'en être suffisamment proche. En outre, elle requiert de minimiser la distance entre la distribution et l'arbre de scénarios, distance qui est pourtant indépendante du problème que l'on souhaite minimiser. Cette approche ne permet donc pas de prendre en compte le lien entre la génération des scénarios et le problème concerné.

3.2.4.2 Stabilité et absence de biais

L'article [Kaut et Wallace, 2007] s'intéresse à l'appréciation de la qualité et de la pertinence des méthodes de génération de scénarios, en particulier à leurs performances pratiques. Les auteurs insistent sur l'importance du lien entre la méthode utilisée et le problème que l'on souhaite résoudre. Ainsi, ils ne cherchent pas à déterminer quelle est, dans l'absolu, la meilleure méthode de génération de scénarios parmi toutes celles existantes, mais plutôt à minimiser l'erreur pour une méthode donnée, par une heuristique. Deux conditions essentielles à remplir par une méthode de génération d'arbres de scénarios sont citées : il s'agit d'une part de sa stabilité, d'autre part que l'arbre n'introduise pas de biais par rapport à la vraie solution, c'est-à-dire que la solution sur l'arbre doit quasiment être la solution du problème initial.

La stabilité se présente sous deux formes ; on souhaite imposer :

- une stabilité interne : si l'on résout un problème donné sur différents arbres générés par la même méthode, on doit obtenir approximativement les mêmes valeurs optimales de la fonction objectif,
- une stabilité externe : les évaluations de la fonction objectif (suivant la distribution de probabilité initiale) en des solutions issues de résolutions sur des arbres distincts (générés par la même méthode) doivent être quasiment identiques.

Tandis que la stabilité externe permet d'assurer une sorte de constance de performance des solutions, la stabilité interne permet d'évaluer la qualité de ces solutions.

Remarques :

2. L'article s'appuie sur le postulat selon lequel l'imposition des mêmes propriétés statistiques à deux arbres distincts mèneront approximativement à la même valeur de la fonction objectif du problème minimisé sur l'arbre.

3.2. CONSTRUCTION DES ARBRES DE SCÉNARIOS

1. Pour apprécier si l'on a stabilité externe d'une méthode, la distribution de probabilité doit être intégralement connue.
2. Une condition suffisante, mais non nécessaire, de stabilité externe est la stabilité interne des solutions, c'est-à-dire qu'elles soient identiques pour des arbres distincts.

En pratique, on cherche à obtenir les deux stabilités mais l'instabilité interne est plus aisée à détecter. Il est toutefois possible de tester l'instabilité externe, par exemple en générant un très gros arbre servant de référence, dont la taille ne constituera pas un réel obstacle puisqu'aucune résolution ne sera effectuée dessus, mais seulement des simulations.

L'absence de biais est très difficile à évaluer ; une parade consisterait à construire un arbre de scénarios de référence de taille suffisante - mais raisonnable pour qu'une résolution soit possible - avec une méthode sans biais différente de celle testée (par exemple, à l'aide d'historiques).

3.2.4.3 Amélioration de la performance

Le biais et le manque de scénarios sont souvent à l'origine d'un défaut de performance d'une méthode de génération de scénarios par échantillonnage. De plus, pour un nombre trop réduit de scénarios, le modèle peut avoir tendance à surestimer la qualité de ses solutions, c'est-à-dire sa stabilité interne (ce phénomène est illustré numériquement dans [Kaut et Wallace, 2007]).

Pour d'autres méthodes qui approchent les propriétés statistiques de distributions (comme celle de [Høyland et Wallace, 2001]), une instabilité peut être due à une insuffisance de ces propriétés statistiques.

3.2.4.4 Choix de la taille de l'arbre

L'article [Shapiro, 2006] s'attache à estimer la taille nécessaire de l'échantillon - ou arbre - généré pour résoudre un problème d'optimisation stochastique multi-étapes avec une précision donnée. Sous certaines conditions de régularité, A. Shapiro fournit ainsi une borne inférieure du nombre de scénarios à construire pour que toute solution quasiment optimale du problème sur l'arbre soit solution presque optimale - avec une tolérance double - du problème initial avec une probabilité donnée.³ L'article conclut que le nombre de scénarios nécessaire pour résoudre le problème initial croît exponentiellement avec le nombre d'étapes.

Remarque : Cette analyse a été faite avec quelques simplifications, notamment l'indépendance des étapes entre elles.

3.2.5 Comparaison de la méthode implémentée dans SOPRANO et de la réduction backward récursive

Le rapport de recherche [Grellier et col., 2004] compare numériquement trois techniques de construction d'arbres, en s'appuyant sur les sorties de l'outil SOPRANO, c'est-à-dire non sur les coûts optimaux mais sur l'analyse de la valeur d'autres grandeurs ; il s'agit des valeurs d'usage des différentes unités de production, calculées par programmation dynamique à partir des valeurs optimales sur l'arbre, obtenues à l'aide d'une optimisation par la méthode des faisceaux ([Bacaud et col., 2001]). Les méthodes confrontées sont celle implémentée dans SOPRANO (décrite au paragraphe 3.2.3.1), celle basée sur une application itérative de l'algorithme de réduction backward (décrite au paragraphe 3.2.3.2), et une combinaison de ces deux méthodes. Celle-ci repose sur le même principe que

3. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, si $N \leq N_{inf}(\epsilon, \alpha)$: toute solution $\frac{\epsilon}{2}$ -optimale du problème sur l'arbre est solution ϵ -optimale du problème initial avec une probabilité $1 - \alpha$, où on définit une solution ϵ -optimale comme une solution admissible dont le coût n'est distant que de ϵ du coût optimal.

la méthode de SOPRANO, à l'exception de la sélection des scénarios représentants des sous-groupes qui est inspirée de l'algorithme de réduction backward.

Les conclusions de cette étude comparative sont les suivantes :

- la méthode obtenant une meilleure représentation des aléas est la réduction backward,
- la méthode de SOPRANO fournit quant à elle de meilleurs coûts de gestion,
- l'approche la plus performante et la plus stable par rapport au nombre de nœuds de l'arbre semble être la méthode combinée,
- dans tous les cas, il est crucial de construire des arbres avec des séparations de scénarios aux périodes les plus difficiles⁴.

Le rapport de recherche [Fedry et Strugarek, 2005] décrit également une étude comparative entre la méthode implémentée dans SOPRANO (avec une « norme » correspondant bien à une estimation du coût de gestion) et l'heuristique décrite dans [Dupačová et col., 2003]. Les résultats de cette étude semblent mener à la conclusion que, pour le problème résolu, les différences obtenues à l'issue de l'utilisation des deux méthodes ne sont pas significatives.

Remarque : Il est cependant préférable de se montrer prudent quant aux conclusions de ces études, eu égard aux changements de modélisation qui ont été opérés depuis.

3.3 Méthodes d'optimisation stochastique sur arbres de scénarios

Dans cette section, nous présentons succinctement des méthodes d'optimisation stochastique alternatives au recouvrement progressif (dont il est plus largement question dans la partie III), mais qui soient, comme cet algorithme, spécifiquement adaptées aux problèmes posés sur des arbres de scénarios. Comme le font remarquer les auteurs de [Mulvey et Ruszczyński, 1995], le développement d'algorithmes spécialisés pour résoudre cette classe assez particulière de problèmes d'optimisation est conditionné par trois questionnements cruciaux :

- La taille du problème sur l'arbre est-elle suffisamment grande pour justifier le développement de méthodes particulières, alors que des méthodes générales existent déjà ?
- À quel point les nouvelles méthodes accélèrent-elles la résolution ?
- Les algorithmes développés spécifiquement résolvent-ils des problèmes que l'on n'aurait pas pu optimiser autrement ?

3.3.1 Une minimisation de la distance aux solutions séparées par scénarios

L'article [Dembo, 1991] s'intéresse à une méthode de résolution de problèmes stochastiques dont la distribution de probabilité est discrétisée en un ensemble de scénarios. R.S. Dembo définit une stratégie réalisable comme une stratégie vérifiant les contraintes non aléatoires, et étant le minimiseur de la somme sur les scénarios, pondérés par leurs probabilités respectives, des normes des contraintes dépendant des scénarios. Il suggère alors une approche en deux étapes :

- résoudre indépendamment les problèmes sur chaque scénario,
- coordonner les solutions en construisant un modèle qui fournira une stratégie réalisable la plus proche possible des solutions associées à chaque scénario.

Plusieurs modèles possibles de coordination sont proposés dans l'article. Par exemple, le premier consiste à minimiser la somme pondérée sur les scénarios des normes carrées des contraintes dépendant des scénarios ajoutées aux normes carrées des écarts entre le critère initial et les valeurs optimales des problèmes sur chaque scénario, et cela sous les contraintes non stochastiques du problème de départ. L'intérêt d'une telle approche est qu'elle s'applique à des problèmes très généraux

4. Par exemple, dans le cadre d'un problème de gestion de production d'électricité, l'hiver est considéré comme une période difficile.

tout en demeurant aisée à implémenter. Cependant, la seconde étape résout un problème qui peut être de grande dimension et non décomposable.

3.3.2 L’algorithme d’approximation quadratique diagonale

L’approche suggérée dans l’article [Mulvey et Ruszczyński, 1992] exploite la structure du problème sur l’arbre, en le décomposant scénario par scénario et en opérant les résolutions sur chaque scénario en parallèle, de manière à ne pas faire croître démesurément les temps de calcul. Il s’agit d’une méthode duale : on applique l’algorithme du lagrangien augmenté en dualisant la contrainte de non-anticipativité, qui est la contrainte responsable du couplage entre les scénarios (une description plus précise de cette méthode est fournie au paragraphe 4.6.2, dans le cadre de la description des approches de linéarisation du lagrangien augmenté). Des résultats numériques sont présentés dans [Mulvey et Ruszczyński, 1995]. Ceux-ci illustrent qu’une parallélisation accélère considérablement les temps de calcul, à condition de ne pas travailler avec un nombre trop élevé de sous-problèmes, de manière à ne pas saturer les communications entre les processeurs. Ces expérimentations révèlent que l’algorithme décrit dans l’article permet de résoudre des problèmes beaucoup plus grands qu’un solveur classique.

3.3.3 L’algorithme de fractionnement dynamique

Le principe de l’algorithme décrit dans [Rockafellar et Salinger, 2003] est de décomposer le problème stochastique multi-étapes sur arbre de manière à prendre facilement en compte sa dynamique ; pour cela, les auteurs appliquent la méthode de Spingarn de fractionnement d’opérateur, ce qui fournit deux sous-problèmes principaux à résoudre à chaque itération :

- un problème dynamique sans contrainte, au coût quadratique et à la dynamique linéaire, ayant une structure de problème sur arbre,
- un ensemble de problèmes convexes de minimisation, soumis aux contraintes du problème initial, et correspondant chacun à un nœud de l’arbre.

Il s’agit d’un algorithme qui n’est pas l’adaptation d’une méthode initialement destinée aux problèmes déterministes (ou stochastiques à deux étapes), et qui s’applique à des problèmes très variés (convexes non linéaires, ou dont le critère est linéaire par morceaux).

3.3.4 La méthode de décomposition stochastique sur arbres de scénarios

L’article [Higle *et col.*, 2009] présente une méthode de décomposition par scénarios avec échantillonnage au cours de la résolution. Plus précisément, à chaque itération, un scénario aléatoire supplémentaire est ajouté à l’échantillon. Il s’agit d’une méthode de plans coupants, qui sont une approximation concave linéaire par morceaux de la fonction duale associée à la relaxation de la contrainte de non-anticipativité. La convergence asymptotique de la méthode est démontrée dans l’article.

3.4 Critique des arbres de scénarios

L’approximation d’une distribution de probabilité par un arbre de scénarios a été fréquemment critiquée. Par exemple, dans le rapport de recherche [Strugarek, 2004], on s’interroge sur l’opportunité de discrétiser l’espérance de la fonction objectif, ainsi que les contraintes de mesurabilité, de manière à formuler un problème d’optimisation stochastique sur un arbre de scénarios. Dans la thèse de doctorat [Girardeau, 2010, chapitre 2], l’efficacité de l’approximation d’une distribution continue par un arbre de scénarios est également mise en cause ; des résultats numériques illustrent le résultat de [Shapiro, 2006], selon lequel la précision des solutions optimales obtenues suite à une

résolution sur l'arbre dépend du nombre de scénarios contenus dans l'arbre. Ainsi, comme cela est démontré dans [Dyer et Stougie, 2006] et indiqué dans [Shapiro, 2010], le nombre de scénarios nécessaire à l'obtention d'une bonne approximation de la distribution de probabilité initiale peut faire accroître la taille d'un problème au delà des capacités numériques à disposition d'un utilisateur. Cela constitue l'une des faiblesses principales de cette approche, contrairement à celles basées sur des échantillonnages de Monte Carlo (étudiées par exemple dans [Nemirovski et Shapiro, 2005]). En outre, les auteurs de [Ben-Tal *et col.*, 2009, page 413] soulignent que si l'on obtient une stratégie optimale pour des scénarios, et que le futur ne correspond à aucun de ces scénarios, on ne pourra pas en pratique utiliser les stratégies optimales calculées.

Nous nous sommes cependant intéressés à la formulation de problèmes sur des arbres de scénarios, car il s'agit de celle actuellement adoptée par EDF pour modéliser les divers aléas à prendre en compte dans le cadre de la gestion de production d'électricité, cadre constituant l'application industrielle de cette thèse.

Deuxième partie

La méthode du lagrangien augmenté

Chapitre 4

Présentation de l'algorithme du lagrangien augmenté

Ce chapitre constitue un prélude à notre étude de l'algorithme du lagrangien augmenté. Nous y présentons un bref historique de la méthode et une description de l'algorithme, puis nous fournissons les résultats connus sur le sujet, que nous avons exploités pour nos travaux. Nous transposons notamment au lagrangien augmenté, à la section 4.8, le résultat de [Dean et Glowinski, 2006] selon lequel, pour un problème strictement quadratique sous contraintes d'égalité non réalisables, les itérés primaux issus d'une relaxation lagrangienne convergent vers la solution du problème réalisable le plus proche. Nous démontrons alors ce résultat également dans le cadre de l'algorithme du lagrangien augmenté, avant de nous intéresser, au chapitre 5, aux problèmes quadratiques convexes (non nécessairement strictement), sous contraintes d'égalité et d'inégalité.

On se place dans le cadre de la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité et d'inégalité de la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathcal{C}} f(x), \\ g_E(x) = 0, \\ g_I(x) \leq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où E et I sont des ensembles finis disjoints d'indices formant une partition de $\{1, \dots, m\}$, \mathcal{C} est un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie, pour tout $x \in \mathcal{C}$, par $g(x) = (g_E(x), g_I(x))$.

Définition 4.1. Le problème (4.1) est appelé *problème primal*. Ses solutions sont appelées *solutions primales*.

Définition 4.2. On introduit le *lagrangien ordinaire* (parfois également appelé *lagrangien classique* ou encore *lagrangien simple*) du problème (4.1) :

$$\ell : \begin{array}{ll} \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda) & \mapsto f(x) + \lambda^\top g(x). \end{array}$$

4.1 Origine

Dans cette section, nous commençons par décrire les motivations qui ont contribué à l'introduction de l'algorithme du lagrangien agmenté.

4.1.1 Une extension des méthodes de pénalisation

La méthode du lagrangien augmenté a été introduite, dans le cas des contraintes d'égalité, simultanément par [Hestenes, 1969] et [Powell, 1969]. Pour Hestenes, il s'agissait d'étendre la méthode

de pénalisation, en s'affranchissant des erreurs numériques induites par cette méthode. L'application du lagrangien augmenté dans le cadre plus général de la minimisation d'une fonction sous des contraintes d'inégalité a ensuite été mise au jour par Rockafellar, dans l'article [Rockafellar, 1974a].

4.1.2 Une fonction de pénalisation

On peut interpréter le lagrangien augmenté comme une fonction de pénalisation du lagrangien classique, comme cela est détaillé dans [Bonnans *et col.*, 2006, partie III, chapitre 14, section 14.3]. Pour fournir plus de précisions à cette interprétation, on rappelle ici la définition d'un problème convexe.

Définition 4.3. Un problème sous contraintes d'égalité et d'inégalité de la forme (4.1) est dit *convexe* si g_E est affine et si f et g_I sont convexes. Ainsi, on dira que l'on est dans le *cas convexe* si l'on est dans le cadre de la résolution d'un problème convexe.

Ainsi, le lagrangien simple d'un problème d'optimisation convexe est une fonction de pénalisation exacte, pourvu que le multiplicateur soit optimal. Cependant, la méconnaissance des multiplicateurs optimaux avant la résolution constitue un obstacle à l'utilisation du lagrangien classique comme fonction de pénalisation pour résoudre le problème. On peut néanmoins s'affranchir de cette difficulté par les techniques de relaxation lagrangiennes, décrites (entre autres) dans [Hiriart-Urruty et Lemaréchal, 1993, chapitre XII]. Cependant, si le problème considéré n'est pas convexe, une difficulté supplémentaire survient car alors le lagrangien n'est pas nécessairement une fonction de pénalisation exacte.

Remarque : On rappelle que la notion de pénalisation exacte est liée au fait qu'un minimum du problème (4.1) est également un minimum du lagrangien augmenté associé. Nous n'en donnons pas ici de définition plus précise car il s'agit d'un concept aux facettes multiples.

Le lagrangien augmenté peut être perçu comme une convexification locale primale du lagrangien simple. Si le problème est également soumis à des contraintes d'égalité, il suffit d'introduire une variable d'écart pour transformer ces contraintes en contraintes d'inégalité et d'ajouter une contrainte de positivité à la variable d'écart (cette approche de construction a été proposée par [Rockafellar, 1973b]). Ainsi, on réécrit le problème (4.1) sous la forme équivalente (4.2) :

$$(4.1) \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{C}, s \geq 0} f(x), \\ g_E(x) = 0, \\ g_I(x) + s = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

On construit alors le lagrangien augmenté en ne dualisant que les contraintes d'égalité du problème (4.2), c'est-à-dire en utilisant le lagrangien augmenté associé à toutes les contraintes d'égalité (initiales et transformées) :

$$\ell_r(x, \lambda) = \min_{s \geq 0} \left(f(x) + \lambda^T g_E(x) + \frac{r}{2} \|g_E(x)\|_2^2 + \lambda_I^T (g_I(x) + s) + \frac{r}{2} \|g_I(x) + s\|_2^2 \right).$$

Ainsi, le lagrangien augmenté correspond à la valeur optimale d'un problème d'optimisation quadratique (dont le hessien du critère est une matrice diagonale), sous contraintes de bornes. La résolution de ce problème, que l'on peut effectuer de manière analytique, permet alors de reformuler l'expression du lagrangien augmenté de la manière suivante :

$$\ell_r(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T \tilde{g}(x, \lambda, r) + \frac{r}{2} \|\tilde{g}(x, \lambda, r)\|_2^2,$$

avec $\tilde{g}_E(x, \lambda, r) = g_E(x)$, et $\tilde{g}_I(x, \lambda, r) = \max(-\frac{1}{r}\lambda_I, g_I(x))$.

4.1.3 La méthode des multiplicateurs

La méthode dite *des multiplicateurs* est une méthode de dualité, qui repose sur le même principe qu'une recherche linéaire, mais à partir d'un lagrangien augmenté. Ainsi, à chaque étape, il s'agit de minimiser le lagrangien augmenté, puis de mettre à jour les multiplicateurs par un procédé dont il est ici question. Plus précisément, on opère cette mise à jour à l'aide de la formule suivante :

$$\lambda_{k+1} := \lambda_k + r_k \tilde{g}(x_{k+1}, \lambda_k, r_k). \quad (4.3)$$

La formule de mise à jour des multiplicateurs trouve une justification intuitive, comme cela est évoqué dans [Powell, 1969, Haarhoff et Buys, 1970, Gilbert, 2012]. Ainsi, considérons l'algorithme comme une méthode qui, à chaque itération, détermine le minimum x_{k+1} de $\ell_{r_k}(\cdot, \lambda_k)$, puis met à jour λ_k et r_k . Alors, le minimum x_{k+1} de $\ell_{r_k}(\cdot, \lambda_k)$ annule son gradient¹, c'est-à-dire :

$$\nabla f(x_{k+1}) + g'(x_{k+1})^\top (\lambda_k + r_k \tilde{g}(x_{k+1}, \lambda_k, r_k)) = 0.$$

Or, pour résoudre le problème (4.1), on cherche à annuler le gradient de son lagrangien simple, qui s'écrit $\nabla f(x) + g'(x)^\top \lambda$, en un couple primal-dual (x, λ) . Ainsi, λ_{k+1} déterminé par la formule (4.3) apparaît comme un candidat naturel à l'approximation de la variable duale optimale λ .

4.2 Description

Après avoir exposé des interprétations intuitives de la méthode du lagrangien augmenté, nous décrivons à présent plus précisément l'algorithme inhérent de résolution d'un problème de la forme (4.1), sur lequel portera notre étude théorique (détaillée au chapitre 5).

Le lagrangien augmenté du problème (4.1) s'écrit également sous la forme équivalente (initiée par [Buys, 1972]) :

$$\ell_r : \begin{array}{l} \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda) \mapsto f(x) + \lambda_E^\top g_E(x) + \frac{r}{2} \|g_E(x)\|_2^2 + \frac{1}{2r} \|(rg_I(x) + \lambda_I)\|_2^2 - \frac{1}{2r} \|\lambda_I\|_2^2. \end{array}$$

Remarque : Dans le cas des problèmes comportant uniquement des contraintes d'égalité, on retrouve bien une pénalisation du lagrangien classique.

L'algorithme se présente de la manière suivante :

Algorithme 1 (Lagrangien augmenté)

1. Initialisation :
 - $k = 0$;
 - choix d'un multiplicateur initial λ_0 ;
 - choix d'un facteur de pénalisation initial r_0 .
2. Calcul de l'itéré primal courant :
 - x_{k+1} solution optimale de $\min_{x \in \mathcal{C}} \ell_{r_k}(x, \lambda_k)$.
3. Calcul de l'itéré dual courant :
 - $\lambda_{k+1} = \lambda_k + r \tilde{g}(x_{k+1}, \lambda_k, r_k)$.
4. Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait :
 - choix d'un $r_{k+1} > 0$;
 - $k \leftarrow k + 1$;
 - retour à l'étape 2.

Définition 4.4. On qualifie de *problèmes internes* les problèmes résolus à l'étape 2 de l'algorithme.

1. On retrouve la formule du gradient du lagrangien augmenté $\nabla_x \ell_r(x, \lambda) = \nabla f(x) + g'(x)^\top (\lambda + r \tilde{g}(x, \lambda, r))$ par un simple calcul, en utilisant :

$$\begin{array}{ll} \text{si } g(x) + \frac{1}{r} \lambda \geq 0 : & g(x) = \tilde{g}(x, \lambda, r), \\ \text{sinon :} & (\lambda + r \tilde{g}(x, \lambda, r))_I = 0. \end{array}$$

4.3 Usage

Cette section détaille les motivations qui peuvent être à l'origine de l'usage et de l'étude du lagrangien augmenté.

4.3.1 Avantages

Cette méthode présente plusieurs avantages.

D'une part, il n'est pas nécessaire de faire tendre vers l'infini le facteur de pénalisation r_k , comme cela est le cas pour les méthodes de pénalisation extérieure classiques (ce qui induit du mauvais conditionnement, donc des difficultés numériques). Cela est lié au fait qu'il s'agisse d'une méthode de pénalisation exacte (en le multiplicateur optimal).

D'autre part, les problèmes internes sont a priori plus simples à résoudre que le problème initial, puisque une partie ou la totalité des contraintes ne sont plus à prendre en compte explicitement. Par exemple, dans le cadre de notre étude du lagrangien augmenté (chapitre 5), au cours de laquelle nous nous intéressons à la résolution d'un problème quadratique convexe sous contraintes d'égalité et d'inégalité linéaires, nous avons pu nous ramener, via l'introduction d'une variable auxiliaire, à des problèmes internes comportant uniquement des contraintes de bornes, que l'on peut résoudre plus aisément que le problème initial ([Moré et Toraldo, 1991, Friedlander et Martínez, 1994]).

En outre, l'intérêt de l'algorithme est mis en évidence dans [Mifflin et Sagastizábal, 2002]²; ainsi, à condition d'avoir complémentarité stricte, on identifie en un nombre fini d'itérations quels multiplicateurs sont nuls, et donc quelles contraintes sont actives et inactives pour le problème original, c'est-à-dire celles qui sont actives et inactives pour les problèmes internes au voisinage de la solution. La combinatoire liée à l'identification des contraintes actives disparaît alors après un nombre fini d'étapes. Une approche analogue est utilisée dans [Friedlander et Leyffer, 2008] pour résoudre des problèmes quadratiques par le lagrangien augmenté dans le cadre de l'algorithme SQP (algorithme dont on peut trouver une présentation détaillée dans [Bonnans *et col.*, 2006, partie III, chapitre 13]).

De plus, la mise en œuvre de la méthode du lagrangien augmenté n'exige pas nécessairement de factorisation matricielle³, et est de ce fait bien adaptée à la résolution de problèmes de grande taille.

Enfin, comme cela est démontré par [Delbos et Gilbert, 2005] dans le cas quadratique convexe, il est possible de contrôler le comportement de l'algorithme grâce à la convergence linéaire globale de la contrainte vers 0. (Ce point est approfondi en détails au paragraphe 4.5.3.1 car il constitue l'origine d'une partie de nos travaux.)

4.3.2 Mise en œuvre

L'algorithme a ainsi été mis en pratique pour développer plusieurs solveurs d'optimisation, avec diverses approches de résolution des problèmes internes, telles que le gradient conjugué (comme cela est exposé dans [Eckstein et Silva, 2010b]) ou une combinaison de plusieurs méthodes comme le gradient projeté, l'activation de contraintes et le gradient conjugué (par exemple [Gilbert, 2009a] décrit la mise en œuvre d'un tel solveur). Il existe également un certain nombre de codes d'optimisation non linéaire reposant sur l'approche du lagrangien augmenté (sans établir de liste exhaustive, par exemple [Conn *et col.*, 1992, Birgin *et col.*, 2005, Andreani *et col.*, 2007]).

2. L'article [Mifflin et Sagastizábal, 2002] s'intéresse en fait plus généralement aux méthodes proximales, et montre que le minimum est atteint en un nombre fini d'itérations, à condition qu'il se trouve sur une « partie acérée » du critère, c'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{C} \quad f(x) \geq f_{\min} + \alpha \operatorname{dist}(x, \operatorname{Sol})$$

où Sol est l'ensemble des minimiseurs de f , et f_{\min} la valeur prise par f sur Sol .

3. Les problèmes internes peuvent être résolus par des méthodes itératives telles que le gradient conjugué.

4.4 Interprétation proximale

Dans le cas convexe, il existe également une interprétation proximale de la méthode des multiplicateurs, que nous détaillons dans cette section, car les différents résultats qui s'ensuivent seront essentiels à notre étude de la méthode dans le cas non réalisable. En outre, l'algorithme du recouvrement progressif étudié dans la troisième partie de ce manuscrit s'interprète également comme une méthode proximale, ce qui justifie l'importance que nous accordons ici à cette notion.

4.4.1 Rappels sur les opérateurs monotones

La description de l'interprétation proximale de l'algorithme du lagrangien augmenté nécessite certains prérequis liés à la théorie des opérateurs monotones, qui sont entre autres exposés dans l'ouvrage [Bauschke et Combettes, 2011] et que nous rappelons dans cette section.

Définition 4.5. Une multifonction $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est dite *univoque* si l'image $T(z)$ de chaque point $z \in \mathbb{R}^n$ est un singleton.

Définition 4.6. La *multifonction inverse* d'une multifonction $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est la multifonction

$$T^{-1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ w \mapsto \{z \in \mathbb{R}^n / w \in T(z)\}. \end{array}$$

Définition 4.7. Un *opérateur monotone* $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multifonction telle que

$$\forall (z, w), (z', w') \in \mathcal{G}r(T), \quad \langle z - z', w - w' \rangle \geq 0.$$

Définition 4.8. Un opérateur monotone $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est dit *fortement monotone de module α* si

$$\forall (z, w), (z', w') \in \mathcal{G}r(T), \quad \langle z - z', w - w' \rangle \geq \alpha \|z - z'\|_2^2.$$

Définition 4.9. Un opérateur monotone T est dit *maximal* si son graphe n'est pas strictement contenu dans le graphe d'un autre opérateur monotone.

Proposition 4.10. *L'opérateur inverse d'un opérateur monotone maximal est également monotone maximal.*

La multiplication par un scalaire d'un opérateur monotone maximal est également un opérateur monotone maximal.

Définition 4.11. L'opérateur inverse d'un opérateur $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est dit *continûment lipschitzien en 0 de module $a \geq 0$* si $T^{-1}(0)$ est un singleton, noté \bar{z} , et s'il existe une constante $\tau \geq 0$ telle que

$$\forall (z, w) \in \mathcal{G}r(T), \quad \|w\|_2 \leq \tau \Rightarrow \|z - \bar{z}\|_2 \leq a \|w\|_2.$$

On exprime également parfois cette propriété en disant qu'il existe une *borne d'erreur* sur $T^{-1}(0)$.

Définition 4.12. Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite *non expansive* si

$$\forall z, z' \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(z) - f(z')\|_2 \leq \|z - z'\|_2.$$

Définition 4.13. Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite *fermement non expansive* si

$$\forall z, z' \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(z) - f(z')\|_2^2 \leq \langle z - z', f(z) - f(z') \rangle.$$

Le théorème suivant est issu de [Minty, 1962, corollaire du théorème 4]; il joue un rôle essentiel quant à la définition de l'algorithme proximal.

Théorème 4.14. *Soit T un opérateur monotone maximal. Alors l'application $P = (I + T)^{-1}$ est univoque et fermement non expansive. En particulier :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{R}^n, \quad \|P(z) - P(z')\|_2^2 + \|(I - P)(z) - (I - P)(z')\|_2^2 \leq \|z - z'\|_2^2.$$

Définition 4.15. L'application P définie au Théorème 4.14 est appelée *résolvante* de l'opérateur T .

4.4.2 Opérateur et algorithme proximal

Définition 4.16. L'opérateur proximal associé à un opérateur monotone maximal T est sa résolvante

$$P = (I + T)^{-1}.$$

L'algorithme proximal inhérent associe à une suite de scalaires $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement positifs et à un vecteur initial z_0 une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ générée par

$$z_{k+1} = P_k(z_k),$$

où $P_k = (I + r_k T)^{-1}$.

4.4.3 La méthode des multiplicateurs

L'article [Rockafellar, 1976a] révèle le lien entre la méthode des multiplicateurs et le lagrangien augmenté.

Définition 4.17. On définit la fonction duale du problème (4.1) :

$$\delta : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^m & \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto -\inf_{x \in \mathcal{C}} f(x) + \lambda^\top g(x, \lambda). \end{array}$$

Définition 4.18. Le problème dual associé est celui qui consiste à maximiser la fonction duale. Ses solutions sont appelées les solutions duales.

Théorème 4.19. Dans le cas convexe, l'algorithme proximal appliqué à l'opérateur $T = \partial\delta$ correspond exactement à la méthode des multiplicateurs.

Nous fournirons plus de précisions au sujet de ce résultat (dans le cas quadratique convexe) au paragraphe 5.2.2 (lemme 5.5).

Cette interprétation proximale est à l'origine de nombre de résultats de convergence de la méthode, dont nous citons une partie à la section 4.5 suivante.

4.5 Convergence

4.5.1 Saut de dualité

On rappelle la définition du saut de dualité d'un problème d'optimisation.

Définition 4.20. Le saut de dualité correspond à la différence (positive) entre le minimum du problème primal et le maximum d'un problème dual associé.

Dans le cadre de l'étude de l'algorithme du lagrangien augmenté, l'existence (c'est-à-dire la positivité stricte) ou la nullité du saut de dualité est une connaissance essentielle, car cette méthode s'interprète comme une recherche de solution par maximisation de la fonction duale. L'article [Rockafellar, 1974a] fournit des conditions sous lesquelles il n'y a pas de saut de dualité dans le cas d'un problème non convexe sous contraintes d'inégalité.⁴

4. Il s'agit de l'extension d'un résultat local de [Arrow et col., 1973], qui suppose de plus la complémentarité stricte.

4.5.2 Vitesse de convergence dans le cas convexe

Dans ce paragraphe, nous évoquons brièvement des conditions de convergence de l'algorithme dans le cas convexe, qui est celui dans lequel nous l'étudierons par la suite (plus précisément dans le cas quadratique convexe).

Dans [Rockafellar, 1973b], Rockafellar a établi une convergence globale dans le cas convexe, pour un facteur de pénalisation quelconque (fixe), et sans nécessité de calculer un minimum exact des problèmes internes à chaque itération^{5, 6}. D'après [Rockafellar, 1976a], dans le cas convexe et avec un facteur de pénalisation variable, si l'ensemble des contraintes est réalisable, et si la suite des multiplicateurs est bornée, alors elle converge linéairement vers une solution duale et la suite primale est asymptotiquement minimisante pour le problème primal. Si de plus l'opérateur $\partial\delta^{-1}$ est continûment lipschitzien en 0, on a unicité des solutions primale et duale, et la suite des itérés primaux converge vers la solution primale. En outre, si le critère f et les contraintes g sont polyédriques, la convergence est atteinte en un nombre fini d'itérations.

Remarque : Les mêmes résultats subsistent dans le cas où l'on n'effectue pas de calcul exact des itérés primaux à chaque itération, mais la convergence n'est alors pas nécessairement atteinte en un nombre fini d'itérations.

4.5.3 Contrôle de la vitesse de convergence

4.5.3.1 Réglage du paramètre de pénalisation

Dans l'article [Delbos et Gilbert, 2005] est présenté un résultat de convergence linéaire globale vers 0 de la norme de la contrainte, dans le cadre de la résolution d'un problème quadratique convexe sous contraintes d'égalité linéaires. Nous détaillons ici particulièrement les conclusions de cet article, car l'étude que nous avons menée (présentée au chapitre 5) en constitue une extension.

On rappelle ci-dessous la définition de la convergence linéaire globale.

Définition 4.21. Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge linéairement vers une limite x si

$$\exists \tau \in [0, 1[, \quad \exists k_\tau \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N} : \quad k \geq k_\tau \quad \implies \quad \|x_{k+1} - x\|_2 \leq \tau \|x_k - x\|_2.$$

Cette convergence est dite *globale* si $\exists \tau \in [0, 1[$ tel que $k_\tau = 0$, c'est-à-dire si l'inégalité ci-dessus est vérifiée dès la première itération.

Plus précisément, on considère une fonction quadratique convexe f , et le problème d'optimisation associé (4.4) suivant, dans lequel on introduit une variable auxiliaire y .

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ l \leq Ax \leq u. \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x), \\ l \leq y \leq u, \\ y = Ax. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

On relaxe la contrainte d'égalité du problème, et on la pénalise, de manière à écrire le lagrangien augmenté associé :

$$\ell_r(x, y, \lambda) = f(x) + \lambda^\top (Ax - y) + \frac{r}{2} \|Ax - y\|_2^2.$$

On applique alors l'algorithme du lagrangien augmenté au problème (4.4).

5. La condition de Slater doit cependant être vérifiée au moins une fois au cours des itérations.

6. Il s'agit de l'extension d'un résultat local de Powell ([Powell, 1969]), selon lequel, dans le cas d'un problème sous contraintes d'égalité, à condition d'avoir choisi un facteur de pénalisation initial suffisamment grand et une solution initiale assez proche d'une solution locale satisfaisant les conditions suffisantes d'optimalité d'ordre 2, la convergence de l'algorithme est linéaire.

Algorithme 2 (Lagrangien augmenté appliqué à un problème quadratique convexe réalisable)

1. Initialisation :
 - $k = 0$;
 - choix d'un multiplicateur initial λ_0 ;
 - choix d'un facteur de pénalisation initial r_0 .
2. Calcul des itérés primaux :
 - (x_{k+1}, y_{k+1}) solution optimale de $\min_{x \in \mathbb{R}^n, l \leq y \leq u} \ell_{r_k}(x, y, \lambda_k)$.
3. Calcul de l'itéré dual :
 - $\lambda_{k+1} = \lambda_k + r_k(Ax_{k+1} - y_{k+1})$.
4. Si le critère d'arrêt $Ax_{k+1} \approx y_{k+1}$ n'est pas satisfait :
 - choix d'un $r_{k+1} > 0$;
 - $k \leftarrow k + 1$;
 - retour à l'étape 2.

L'article [Delbos et Gilbert, 2005] fournit les démonstrations des deux résultats suivants.

Proposition 4.22. *Si le problème (4.4) a une solution, tous les problèmes internes*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, l \leq y \leq u} \ell_{r_k}(x, y, \lambda_k)$$

ont également une solution, et l'algorithme du lagrangien augmenté est bien défini.

Théorème 4.23. *On suppose que le problème (4.4) a une solution. Soit S_D l'ensemble de ses solutions duales. Alors, $\forall \beta > 0, \exists L > 0$ tel que*

$$\text{dist}(\lambda_0, S_D) \leq \beta \implies \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|Ax_{k+1} - y_{k+1}\|_2 \leq \min\left(\frac{L}{r_k}, 1\right) \|Ax_k - y_k\|_2.$$

En particulier, si $\inf_{k \geq 1} r_k$ est assez grand, la norme de la contrainte converge globalement linéairement vers 0.

Remarques :

1. *La constante L n'est pas aisément évaluable⁷, mais l'on peut cependant en calculer une borne inférieure satisfaisante à la fin de l'itération k :*

$$L_{inf}^k = \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \left(r_i \frac{\|Ax^{i+1} - y^{i+1}\|_2}{\|Ax^i - y^i\|_2} \right).$$

Ainsi, si l'on souhaite atteindre un taux de convergence τ , il suffit, à chaque itération, de choisir au début de l'itération $k + 1$ suivante :

$$r_{k+1} \geq \frac{L_{inf}^k}{\tau}. \tag{4.5}$$

2. *Il faut veiller à ne pas augmenter le facteur de pénalisation r_k trop fortement car, même si la convergence s'en trouverait accélérée, cela accentuerait la difficulté de résolution des problèmes internes (du fait d'un mauvais conditionnement).*

Le bénéfice occasionné par un tel résultat de convergence linéaire globale est de pouvoir accorder une importance moindre à l'initialisation de l'algorithme, mais également de pouvoir anticiper le nombre d'itérations requises pour converger à une précision donnée. Ainsi, la règle de mise à jour du facteur de pénalisation (4.5) assure une convergence systématique de la méthode en un temps maîtrisé. En outre, le réglage du facteur de pénalisation est effectué « automatiquement » à partir de la valeur d'un taux de convergence τ souhaité, fixée par l'utilisateur qui n'a alors pas besoin de se préoccuper des détails techniques liés au paramétrage de r_k .

7. Il s'agit de la constante de Lipschitz de l'inverse du sous-différentiel de la fonction duale.

4.6 Méthodes de décomposition du lagrangien augmenté

Pour pouvoir utiliser une telle approche dans le cadre de l'optimisation de grands systèmes (dont font partie les problèmes de gestion de production d'électricité), il est essentiel de pouvoir décomposer les problèmes internes. Nous introduisons ici les différentes approches que nous avons rencontrées qui cherchent à se départir du caractère non décomposable du lagrangien augmenté (du fait de son terme quadratique). Dans la suite de ce manuscrit (parties III et IV), nous nous intéresserons en effet plus précisément à l'algorithme du recouvrement progressif, qui peut être interprété de la sorte.

4.6.1 Le principe du problème auxiliaire

On rappelle ici les définitions de fonctions dites « propres », « coercives » ou « fermées ».

Définition 4.24. Une fonction $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ne prenant pas la valeur $-\infty$ et n'étant pas identiquement égale à $+\infty$ est dite *propre*.

Définition 4.25. Une fonction $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite *coercive* sur une partie non bornée X de \mathbb{E} si $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty, x \in X} f(x) = +\infty$.

Définition 4.26. Une fonction $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite *fermée*, ou encore *semi-continue-inférieurement*, si son épigraphe est lui-même fermé.

Le principe du problème auxiliaire, exposé dans [Cohen, 1978, Cohen, 1980], est une méthode itérative de linéarisation de fonctions convexes fermées, propres et coercives, dans le but de décomposer les problèmes d'optimisation associés. Ainsi, la partie non décomposable de la fonction (supposée différentiable) est approchée par son développement limité au premier ordre (en l'itéré courant). Pour conserver la coercivité de la fonction à minimiser, un terme fortement convexe et différentiable, désigné sous le terme de « noyau »⁸, est ajouté. Les problèmes décomposables dérivés sont appelés « problèmes auxiliaires ». Dans le cas convexe, la convergence globale de l'algorithme a été démontrée dans [Cohen, 1980].

Cette méthode s'applique directement à un lagrangien augmenté, qui comporte un terme quadratique non décomposable.

4.6.2 La méthode d'approximation quadratique diagonale

L'article [Mulvey et Ruszczyński, 1992] présente également une méthode dérivée du lagrangien augmenté adaptée à la résolution de grands problèmes. En effet, les contraintes (linéaires) d'égalité sont dualisées, mais le lagrangien augmenté résultant, du fait de son terme quadratique, contient des produits - dits « croisés » - de variables différentes, qui se trouvent alors couplées dans les critères des problèmes internes à minimiser. Pour se départir de ce couplage, les auteurs proposent d'utiliser une idée de [Stephanopoulos et Westerberg, 1975] pour approximer les produits croisés par une somme de termes découplés. La résolution des problèmes de minimisation du lagrangien augmenté sera donc effectuée à chaque itération par un (sous-)algorithme permettant d'obtenir une bonne approximation des termes croisés. L'article [Ruszczyński, 1995] propose une preuve de convergence de la méthode.

Dans [Rosa et Ruszczyński, 1996], les auteurs s'intéressent à l'application d'une telle approche à une décomposition par scénarios d'un problème d'optimisation stochastique (qui a la même structure que ceux que nous résolvons dans la partie IV de ce manuscrit), ainsi qu'à une décomposition dite « nodale », c'est-à-dire par périodes temporelles. Ils constatent numériquement que, dans le cas d'une décomposition nodale, les sous-problèmes sont plus difficiles à résoudre, et le nombre d'itérations internes (qui aboutissent à l'approximation des termes découplés) présente un comportement plus

8. L'utilité du noyau est d'assurer la nullité du développement limité d'ordre 1 en l'itéré courant du terme additionnel fortement convexe, de manière à ne pas perturber les conditions d'optimalité.

chaotique, ce qu'ils expliquent par le fait que les normes des matrices des contraintes linéaires relaxées sont plus importantes dans le cadre de cette décomposition que pour celle par scénarios.

4.6.3 L'algorithme du lagrangien augmenté séparable (SALA)

Nous portons une attention particulière à l'algorithme SALA, car il s'agit de l'une des interprétations possibles pour le recouvrement progressif, dont il sera question dans les parties suivantes (III et IV) de ce manuscrit.

Dans l'article [Dussault *et col.*, 1996], les auteurs suggèrent également d'appliquer un algorithme de lagrangien augmenté à des problèmes de grande taille, tout en préservant le caractère séparable du critère initial. Dans ce cadre, on suppose que les contraintes d'inégalité sont découplées. Pour chaque contrainte d'égalité couplant plusieurs variables entre elles, on introduit autant de variables auxiliaires que de variables couplées. Par exemple, une contrainte de la forme :

$$\sum_{i=1}^m h_i(x) = 0$$

se réécrit en $m + 1$ contraintes :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad h_i(x) + y_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m y_i = 0.$$

Les contraintes séparées sont alors dualisées, et l'on obtient un lagrangien augmenté soumis aux mêmes contraintes d'inégalité (sur x) que le problème initial, et à des contraintes d'égalité ne concernant que la variable y , mais dont le terme quadratique présente un couplage entre les variables. Lorsqu'on applique l'algorithme du lagrangien augmenté, il s'agit d'effectuer des minimisations successives en les coefficients de x et y , au lieu de résoudre les problèmes internes en considérant toutes les variables en même temps, ce qui revient à effectuer une itération de l'algorithme de Gauss Seidel. Ainsi, l'on sépare les termes du lagrangien augmenté pour chaque minimisation par rapport à une variable scalaire (toutes les autres variables étant fixées par le résultat de leur précédente optimisation). En outre, la minimisation par rapport aux variables auxiliaires se simplifie et devient une somme scalaire d'éléments connus.

L'article [Dussault *et col.*, 1996] étudie les propriétés de convergence locale de cet algorithme. Les articles [Dussault *et col.*, 2005, Lenoir et Mahey, 2007] s'intéressent quant à eux au comportement d'un algorithme de lagrangien augmenté décomposable, pour lequel plusieurs paramètres d'augmentation (associés aux différentes contraintes couplantes dualisées) ont été définis. Plus précisément, la contrainte couplante dualisée est multipliée par une « matrice de paramétrage » inversible, qui est définie comme une matrice diagonale par blocs, chaque bloc correspondant à un ensemble de variables d'un sous-problème résolu indépendamment des autres dans l'algorithme. Un taux de convergence super-linéaire peut ainsi être atteint dans le cas de critères deux fois différentiables. Nous utiliserons une telle stratégie de paramétrage pour améliorer le comportement numérique de l'algorithme du recouvrement progressif, comme cela est décrit dans la partie (IV).

Des stratégies de mise à jour de la matrice de paramétrage sont également présentées dans ces articles. Ainsi, [Dussault *et col.*, 2005] suggère de multiplier régulièrement, au cours des itérations, les paramètres de l'algorithme par un coefficient constant, tandis que [Lenoir et Mahey, 2007], ainsi que la thèse [Lenoir, 2008], proposent d'utiliser le quotient de la norme du pas dual par celle du pas primal pour effectuer une mise à jour des paramètres. Ces stratégies permettent d'obtenir des résultats numériques favorables.

4.6.4 Recherche linéaire d'Armijo décomposée

L'article [Culioli et Malézieux, 2000] suggère de résoudre les problèmes internes par une recherche linéaire suivant la règle d'Armijo. Ainsi, dans le cas d'un problème comportant un grand nombre N de variables non couplées dans le critère initial à minimiser, il est possible de décomposer la recherche linéaire dans une direction d en N recherches linéaires dans des directions d_1, \dots, d_N . Une preuve de convergence de la méthode peut être obtenue dans le cas de minimisations primales exactes.

4.7 Extensions

Nous présentons dans cette section des algorithmes s'inspirant de celui du lagrangien augmenté, qui pourraient permettre, dans le cadre d'une application industrielle telle que la gestion d'électricité, une accélération de la méthode, sans décomposition du lagrangien augmenté.

4.7.1 La méthode proximale des multiplicateurs

La méthode proximale des multiplicateurs a été étudiée dans l'article [Rockafellar, 1976a]. Il s'agit d'un algorithme quasiment identique à celui du lagrangien augmenté, à l'exception du calcul de la solution primale courante, qui n'est pas effectué de manière exacte, mais par l'intermédiaire d'un terme proximal. Plus précisément, en reprenant les notations du paragraphe 4.2, l'itéré primal x_{k+1} est la solution du problème

$$\min_{x \in \mathcal{C}} \ell_{r_k}(x, \lambda_k) + \frac{1}{2r_k} \|x - x_k\|_2^2.$$

D'après Rockafellar ([Rockafellar, 1976a]), on peut obtenir des résultats de convergence pour cette approche de la même manière que pour la méthode des multiplicateurs. Ainsi, les vitesses de convergence des deux méthodes sont assez proches, mais la mise à jour de l'itéré primal est plus stable (puisque que l'on minimise une fonction fortement convexe). En outre, les suites primale et duale convergent toutes les deux (même si l'on n'a pas unicité des solutions primale et duale). Plus précisément, d'après [Rockafellar, 1976a, théorèmes 7 et 8], si la suite primale-duale générée est bornée, alors elle converge vers une solution primale-duale, il n'y a pas de saut de dualité et la complémentarité est vérifiée asymptotiquement. De plus, la convergence est (asymptotiquement) linéaire.

4.7.2 Lagrangien augmenté dans le dual

Dans [Ouorou, 2000, Ouorou, 2007], l'auteur propose de remplacer la mise à jour des multiplicateurs de l'algorithme du lagrangien augmenté par la détermination des variables duales qui maximisent un lagrangien augmenté associé au problème dual. Une preuve de convergence est fournie et, dans le cas linéaire, il existe une interprétation proximale de l'étape de mise à jour des itérés primaux.

4.7.3 Règles alternatives de mise à jour des multiplicateurs

Nous avons décrit au paragraphe 4.1.3 la règle de mise à jour associée à la méthode des multiplicateurs (suggérée par [Hestenes, 1969, Powell, 1969]). Nous citons ici à présent d'autres formules itératives de révision de λ .

L'article [Dussault, 1998] s'intéresse à plusieurs règles alternatives pour la mise à jour des multiplicateurs, dans le cadre d'un problème sous contraintes d'égalité.⁹ En particulier, il mentionne,

9. Dans chaque cas, la suite des paramètres de pénalisation $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est choisie croissante et, si l'on résout les problèmes internes de lagrangien augmenté par une méthode de descente (de Newton), l'article fournit des bornes asymptotiques de la norme du gradient du lagrangien augmenté, de la forme r_{k+1}/r_k^p .

en plus de la règle « classique » d'ordre 1 (c'est-à-dire un pas de gradient multiplié par le facteur de pénalisation r_k , comme pour l'algorithme d'Uzawa), la règle selon laquelle les multiplicateurs restent fixés (c'est-à-dire une méthode de pénalisation), ainsi qu'une règle du second ordre pour mettre à jour les multiplicateurs au cours des itérations :

$$\lambda_+ = \lambda + H(\bar{x}, \lambda, r)^{-1}G(\bar{x}, \lambda, r),$$

avec G et H respectivement le gradient et le hessien du lagrangien augmenté. La thèse [Buys, 1972] propose également une règle du deuxième ordre, en s'inspirant de la formule de Newton pour résoudre en λ l'équation $g(\bar{x}_r(\lambda)) = 0$:

$$\lambda_+ = \lambda + (J(\bar{x})H(\bar{x}, \lambda, r)J(\bar{x})^\top)^{-1}g(\bar{x}),$$

avec J la jacobienne des contraintes.

L'article [Conn *et col.*, 1991] présente deux algorithmes basés sur la méthode du lagrangien augmenté, mais au cours desquels les mises à jour des multiplicateurs sont effectuées en utilisant des estimations (du premier et du deuxième ordre) des multiplicateurs optimaux à partir des solutions primales courantes. Une preuve de convergence globale est produite dans le cas d'un critère et de contraintes deux fois continûment différentiables. De plus, l'article fournit une borne de l'erreur primale courante en fonction de l'estimation des multiplicateurs.

4.7.4 Améliorations numériques

4.7.4.1 Résolution approchée des problèmes internes

En pratique, les problèmes internes ne sont pas résolus numériquement de manière exacte au cours de l'algorithme, mais il est néanmoins possible (comme on l'a vu au paragraphe précédent) d'assurer la convergence de la méthode. Nous fournissons ici quelques détails à ce sujet, notamment sur le lien entre la convergence de l'algorithme avec résolution inexacte des problèmes internes et la précision requise pour la résolution de ces problèmes internes.

Dans les articles [Dostál *et col.*, 1999] (qui considère des problèmes sous contraintes d'égalité uniquement) et [Dostál *et col.*, 2003] (qui s'intéresse quant à lui aux problèmes sous contraintes d'égalité et de bornes), la précision requise pour la résolution des problèmes de minimisation du lagrangien augmenté est en fait liée à l'admissibilité de l'itéré courant, c'est-à-dire à la valeur de la norme de la contrainte pénalisée ; ainsi, lorsque l'algorithme est loin d'avoir trouvé le multiplicateur optimal, il n'est pas nécessaire d'exiger une précision trop importante¹⁰. En outre, le contrôle adaptatif de la précision est utilisé pour décider de l'accroissement (ou du maintien) itératif du paramètre de pénalisation. Et il n'est pas nécessaire d'introduire une suite inconnue de paramètres convergeant vers 0 pour ajuster la précision (comme c'est le cas dans [Rockafellar, 1976a]). Une preuve de la convergence de cette version de l'algorithme du lagrangien augmenté est fournie.

L'article [Eckstein et Silva, 2010a] propose également un nouveau critère d'arrêt relatif pour la résolution approximative des problèmes internes de l'algorithme du lagrangien augmenté. Leur critère ne requiert pas non plus de choisir arbitrairement une suite infinie de paramètres, ni ne nécessite de calculs supplémentaires excessifs (uniquement celui du gradient du lagrangien augmenté). Une preuve de convergence globale, dans le cas convexe, est produite dans l'article.

4.7.4.2 Un préconditionnement pour s'affranchir des erreurs numériques

Au cours de l'exécution de l'algorithme, lorsque le facteur de pénalisation r devient important, il peut être à l'origine d'erreurs numériques du fait de l'importance prise par le terme quadratique

10. Dans l'article, les problèmes internes sont résolus par des méthodes de type gradient conjugué.

additionnel des problèmes internes de minimisation du lagrangien augmenté. Dans le cadre de l'application du recouvrement progressif à un problème de gestion de production d'électricité, nous avons été amenés, pour améliorer les résultats obtenus, à effectuer un changement de variables pour éviter de telles erreurs numériques (comme cela est présenté à la partie IV).

L'article [Hager, 1987] expose comment construire une matrice de changement de variables, permettant d'effectuer un préconditionnement pour se départir de telles erreurs numériques. Hager propose un algorithme basé sur la méthode des multiplicateurs, dans lequel les problèmes internes sont résolus par un nombre contrôlé d'itérations de gradient conjugué. À chaque itération externe de l'algorithme, le gradient conjugué est préconditionné à partir d'une matrice correspondant au gradient des contraintes d'égalité actives en l'itéré primal précédent.

Dans l'article [Hager, 1993], le même auteur s'intéresse plus particulièrement au prétraitement de contraintes dites « rigides », qui doivent être satisfaites non seulement à la convergence mais également à chaque itération (comme cela peut être le cas, par exemple, pour la contrainte d'équilibre offre-demande); pour permettre cela, Hager préconise d'équilibrer l'erreur associée à la violation de contraintes et celle associée à la sous-optimalité. Il suggère également une matrice de préconditionnement permettant la satisfaction des contraintes rigides, ainsi qu'un équilibre entre l'erreur de non-réalisabilité et l'erreur de non-optimalité.

4.8 Les problèmes quadratiques strictement convexes sous contraintes d'égalité non réalisables

4.8.1 Introduction

La plupart des travaux sur les méthodes d'optimisation s'intéressent au comportement de celles-ci lorsque le problème à résoudre est réalisable, c'est-à-dire lorsque l'intersection des ensembles de contraintes sur lequel un critère est minimisé est supposée non vide. Cependant, la description des diverses contraintes d'un problème peut s'avérer complexe et, en pratique, aboutir à une incompatibilité involontaire. En outre, dans le cas d'un très grand nombre de contraintes, une telle incompatibilité n'est pas aisément détectable en amont de la résolution. Cependant, le comportement des algorithmes dans de telles situations n'est, en général, pas connu. Ainsi, un algorithme susceptible de fournir des informations lorsqu'il est confronté à des contraintes non réalisables présente un intérêt manifeste. Qui plus est, dans le cadre d'un besoin industriel, si les contraintes d'un problème se révèlent inconciliables, il est parfois néanmoins nécessaire d'obtenir une solution satisfaisant au mieux ces contraintes (dans un sens qui pourra dépendre de l'algorithme).

Certains auteurs ont ainsi considéré l'issue de méthodes lorsqu'on leur proposait un problème non réalisable à résoudre. Par exemple, l'article [Nesterov *et col.*, 1999] étudie le comportement des méthodes de points intérieurs dans un tel cadre. Les auteurs ont construit un détecteur d'irréalisation, et ont fourni une estimation du nombre d'itérations à partir duquel l'irréalisation était découverte. Les auteurs de [Epelman et Freund, 2000] se sont quant à eux attachés à la recherche du point réalisable le plus proche d'un ensemble de contraintes lors de l'exécution d'un algorithme inspiré de celui de Neumann (pour la résolution d'inégalités linéaires).

Nous nous intéressons dans cette section au comportement du lagrangien augmenté appliqué à des problèmes quadratiques strictement convexes sous contraintes linéaires d'égalité non réalisables. Le résultat de convergence que nous démontrons au théorème 4.31 a été annoncé dans [Fortin et Glowinski, 1982, remarque 5.6, page 42], puis [Glowinski et Le Tallec, 1989, remarque 2.13, page 65], sans y être néanmoins prouvé. Cependant, [Dean et Glowinski, 2006, théorème 4.1] expose un résultat similaire dans le cadre de la relaxation lagrangienne, duquel nous nous sommes inspirés. En effet, nous utilisons ici des techniques d'algèbre linéaire pour montrer la convergence linéaire des itérés primaux vers la solution du problème réalisable le plus proche, tandis que, dans le cas

quadratique - et ainsi linéaire - sous contraintes d'égalité et d'inégalité du chapitre 5, nous ferons appel à des outils d'analyse convexe.

4.8.2 Description du problème

On se place dans le cadre de la résolution d'un problème quadratique strictement convexe sous contraintes d'égalité. Plus précisément, l'on cherche à minimiser une fonction

$$q : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}x^\top Hx + g^\top x, \end{array}$$

sous une contrainte d'égalité $Ax = b$, où $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive, A est une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ et g, b sont respectivement des vecteurs de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m . Le problème s'écrit ainsi

$$\inf_{Ax=b} q(x). \quad (4.6)$$

On ne suppose pas que $b \in \mathcal{R}(A)$; ainsi le problème (4.6) peut être non réalisable.

4.8.3 Le lagrangien augmenté

Le lagrangien augmenté associé à la relaxation de la contrainte d'égalité est la fonction définie, pour $r \geq 0$, par :

$$\ell_r : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda) \mapsto q(x) + \lambda^\top (Ax - b) + \frac{r}{2} \|Ax - b\|_2^2. \end{array}$$

L'algorithme du lagrangien augmenté, à paramètre r fixé, appliqué à ce problème d'optimisation consiste, comme on l'a vu précédemment au paragraphe 4.2, à calculer itérativement, à partir d'un multiplicateur $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ et de $k = 0$:

$$x_{k+1} \text{ solution de } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ell_r(x, \lambda_k), \quad (4.7)$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + r(Ax_{k+1} - b). \quad (4.8)$$

Il génère ainsi une suite de multiplicateurs $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

4.8.4 Résultat de convergence

On considère le hessien du lagrangien

$$H_r = H + rA^\top A,$$

ainsi que le problème d'optimisation aux contraintes relaxées

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} q(x), \\ A^\top (Ax - b) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Le théorème de convergence requiert les trois lemmes suivants.

Lemme 4.27. *Pour tout $\lambda_k \in \mathbb{R}^m$, le lagrangien augmenté $\ell_r(\cdot, \lambda_k)$ a un unique minimiseur x_{k+1} qui vérifie*

$$H_r x_{k+1} + A^\top \lambda_k + g - rA^\top b = 0. \quad (4.10)$$

PREUVE : En effet, $r \geq 0$ et $A^\top A$ est symétrique semi-définie positive, et puisque H est symétrique définie positive, $H_r = H + rA^\top A$ l'est également. Donc le lagrangien augmenté est strictement convexe (en x) et a un unique minimiseur x_{k+1} qui annule son gradient. \diamond

4.8. LES PROBLÈMES QUADRATIQUES STRICTEMENT CONVEXES SOUS
CONTRAINTES D'ÉGALITÉ NON RÉALISABLES

Lemme 4.28. *Le problème (4.9) admet une unique solution \bar{x} et il existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tel que :*

$$\begin{cases} H\bar{x} + g + A^\top A\bar{\lambda} = 0, \\ A^\top(A\bar{x} - b) = 0. \end{cases} \quad (4.11a)$$

$$(4.11b)$$

PREUVE : En effet, puisque H est définie positive, le critère de (4.9) est quadratique strictement convexe. De plus, son ensemble admissible $\{x \in \mathbb{R}^n / A^\top(Ax - b) = 0\}$ est convexe, fermé et non vide (il correspond aux solutions d'un problème de moindres carrés linéaire). Les équations (4.11) correspondent alors à ses conditions d'optimalité. \diamond

Lemme 4.29. *On suppose $r > 0$.*

1. *Les n valeurs propres de la matrice $H_r^{-1}A^\top A$ sont toutes réelles et positives (non nécessairement strictement).*
2. *Les vecteurs propres associés forment une base de \mathbb{R}^n qui est orthogonale pour le produit scalaire $(u, v) \mapsto u^\top H_r v$ associé à la matrice H_r .*
3. *Les n valeurs propres de la matrice $H_r^{-1}A^\top A$ sont toutes inférieures à $1/r$.*

PREUVE :

[1. et 2.] Puisque on a l'équivalence

$$H_r^{-1}A^\top Aw = \mu w \quad \Leftrightarrow \quad H_r^{-1/2}A^\top AH_r^{-1/2}H_r^{1/2}w = \mu H_r^{1/2}w,$$

(μ, w) est un couple de valeur propre-vecteur propre de $H_r^{-1}A^\top A$ si, et seulement si, $(\mu, H_r^{1/2}w)$ en est un pour $H_r^{-1/2}A^\top AH_r^{-1/2}$. La matrice symétrique $H_r^{-1/2}A^\top AH_r^{-1/2}$ étant semi-définie positive, ses valeurs propres, et a fortiori celles de $H_r^{-1}A^\top A$, sont positives. En outre, ses vecteurs propres forment une base de \mathbb{R}^n pour le produit scalaire euclidien, et on en déduit ainsi que ceux de $H_r^{-1}A^\top A$ forment une base de \mathbb{R}^n pour le produit scalaire associé à H_r .

[3.] Il suffit de montrer que la plus grande valeur propre μ_{\max}^r de $H_r^{-1}A^\top A$ vérifie $\mu_{\max}^r \leq 1/r$.

- Si $A = 0$, toutes les valeurs propres de $H_r^{-1}A^\top A$ sont nulles et le résultat est clair
- Sinon, d'après le point 2, μ_{\max}^r est également la plus grande valeur propre de $H_r^{-1/2}A^\top AH_r^{-1/2}$, et vérifie donc :

$$\begin{aligned} \mu_{\max}^r &= \max_{v \neq 0} \frac{v^\top H_r^{-1/2}A^\top AH_r^{-1/2}v}{\|v\|_2^2} \\ &= \max_{w \neq 0} \frac{\|Aw\|_2^2}{w^\top H_r w}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec ainsi $\mu_{\max}^r \neq 0$ car dans ce cas $A \neq 0$ et a son noyau non identiquement égal à \mathbb{R}^n . On réécrit alors (4.12) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_{\max}^r} &= \inf_{Aw \neq 0} \frac{w^\top H_r w}{\|Aw\|_2^2} \\ &= \inf_{Aw \neq 0} \left(\frac{w^\top H w}{\|Aw\|_2^2} + r \right) \\ &\geq r \quad [H \succ 0]. \end{aligned}$$

\diamond

Le théorème ci-dessous fait référence à la notion de « divergence arithmétique » d'une suite, dont on introduit ici la définition.

Définition 4.30. On dit qu'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *diverge arithmétiquement* si la suite des différences de ses termes successifs converge vers un vecteur non nul.

On peut à présent énoncer et démontrer le théorème de convergence linéaire. On introduit pour cela μ_{\min}^r qui est la plus petite valeurs propre strictement positive de $H_r^{-1}A^\top A$.

Théorème 4.31. *On suppose H définie positive et $r > 0$. Alors, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge linéairement, pour la norme associée à la matrice H_r , vers la solution \bar{x} du problème (4.9) avec un taux $(1 - r\mu_{\min}^r)$. De plus, si $b \notin \mathcal{R}(A)$, la suite des multiplicateurs $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diverge arithmétiquement.*

PREUVE : L'équation (4.8) se réécrit, en utilisant (4.11b) :

$$A^\top(\lambda_{k+1} - A\bar{\lambda}) = A^\top(\lambda_k - A\bar{\lambda}) + rA^\top A(x_{k+1} - \bar{x}). \quad (4.13)$$

On soustrait également l'équation (4.11a) de (4.10), et en utilisant (4.11b), on obtient :

$$H_r(x_{k+1} - \bar{x}) + A^\top(\lambda_k - A\bar{\lambda}) = 0. \quad (4.14)$$

En utilisant (4.14) au même rang ainsi qu'au rang supérieur, et en les soustrayant à (4.13), on obtient alors

$$-H_r(x_{k+2} - \bar{x}) = -H_r(x_{k+1} - \bar{x}) + rA^\top A(x_{k+1} - \bar{x}),$$

c'est-à-dire

$$x_{k+2} - \bar{x} = (Id - rH_r^{-1}A^\top A)(x_{k+1} - \bar{x}). \quad (4.15)$$

Soit $(\mu_1^r, \dots, \mu_n^r)$ les valeurs propres non nulles de $H_r^{-1}A^\top A$ rangées dans l'ordre croissant. Elles sont réelles et positives d'après le lemme 4.29. On considère w_1, \dots, w_n les vecteurs propres associés constituant une base de \mathbb{R}^n (également d'après le lemme 4.29) orthogonale pour le produit scalaire associé à H_r . D'après (4.14), pour tout $k \geq 1$, $H_r(x_k - \bar{x}) \in \mathcal{R}(A^\top) = \mathcal{R}(A^\top A)$ ¹¹, et on en déduit ainsi que $(x_k - \bar{x}) \in \mathcal{R}(H_r^{-1}A^\top A)$. On décompose alors $(x_1 - \bar{x})$ dans la base formée par les vecteurs propres $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$(x_1 - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n \gamma_i w_i,$$

et on obtient par récurrence (en utilisant (4.15)) :

$$\forall k \geq 1, \quad (x_k - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (1 - r\mu_i^r)^{k-1} \gamma_i w_i.$$

Or, par le point 3 du lemme 4.29, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(1 - r\mu_i^r) \in [0, 1[$, ce dont on déduit que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers \bar{x} . De plus on a pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - \bar{x}\|_{H_r}^2 &= \sum_{i=1}^n (1 - r\mu_i^r)^{2k} \gamma_i^2 \\ &\leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (1 - r\mu_i^r)^2 \|x_k - \bar{x}\|_{H_r}^2 \\ &= (1 - r\mu_{\min}^r)^2 \|x_k - \bar{x}\|_{H_r}^2, \end{aligned}$$

et on en conclut que cette convergence est linéaire pour la norme associée à la matrice H_r , de taux $(1 - r\mu_{\min}^r)$.

11. Le résultat $\mathcal{R}(A^\top) = \mathcal{R}(A^\top A)$ est notoire ; il se prouve de la manière suivante : l'inclusion $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^\top A)$ est immédiate, et si $x \in \mathcal{N}(A^\top A)$: $\|Ax\|_2^2 = x^\top A^\top Ax = 0$ et $x \in \mathcal{N}(A)$, d'où $\mathcal{N}(A^\top A) = \mathcal{N}(A)$ et donc $\mathcal{R}(A^\top A) = \mathcal{R}(A^\top)$.

4.8. LES PROBLÈMES QUADRATIQUES STRICTEMENT CONVEXES SOUS CONTRAINTES D'ÉGALITÉ NON RÉALISABLES

La divergence arithmétique des multiplicateurs se déduit de leur formule de mise à jour (4.8); ainsi, si $b \notin \mathcal{R}(A)$, on a $\lambda_{k+1} - \lambda_k = r(Ax_{k+1} - b)$ qui converge vers $r(A\bar{x} - b)$ (non nul dans ce cas). \diamond

Remarque : Le résultat assurant la divergence arithmétique des multiplicateurs garantit, comme cela est précisé dans [Fortin et Glowinski, 1982, remarque 5.6, pages 42-43], que cette divergence sera plus lente que la convergence des variables primales, puisque dans le premier cas il s'agit d'additions successives de termes, tandis que dans le second il s'agit de multiplications. Ainsi, en pratique, un utilisateur n'aura pas à se soucier du risque d'atteinte de valeurs numériques « infinies » pour la suite duale, avant la convergence de l'algorithme.

Chapitre 5

How the augmented Lagrangian algorithm deals with an infeasible convex quadratic optimization problem

Nous nous intéressons en particulier dans ce chapitre au comportement de l'algorithme du lagrangien augmenté dans le cas de problèmes non réalisables. Plus précisément, notre motivation est d'étendre le résultat (évoqué sans démonstration dans [Fortin et Glowinski, 1982, remarque 5.6, page 42] et [Glowinski et Le Tallec, 1989, remarque 2.13, page 65]) du théorème 4.31 présenté à la section 4.8, dont la preuve s'inspire de celle de [Dean et Glowinski, 2006, théorème 4.1] pour la relaxation lagrangienne, aux problèmes quadratiques de la forme

$$\begin{cases} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} q(x), \\ l \leq Ax \leq u, \end{cases}$$

en nous départissant de l'hypothèse de stricte convexité et en élargissant le cadre de l'étude aux problèmes sous contraintes d'inégalité et non plus uniquement d'égalité. Nous avons ainsi démontré la convergence linéaire globale de l'algorithme du lagrangien augmenté dans le cas de problèmes quadratiques « non réalisables », c'est-à-dire vérifiant

$$[l, u] \cap \mathcal{R}(A) = \emptyset.$$

Cette extension du résultat présenté à la section 4.8 nécessite, comme on l'a déjà précisé au chapitre précédent, l'utilisation d'outils d'analyse convexe, et non plus uniquement d'algèbre linéaire. Par ailleurs, comme on ne suppose plus la stricte convexité, mais seulement la convexité, la convergence des itérés primaux n'est plus assurée. Le résultat porte alors sur la convergence linéaire des contraintes vers leur valeur minimale.

Les résultats de ce chapitre sont repris de l'article [Chiche et Gilbert, 2012], en cours de finalisation, que nous reproduisons ci-dessous. Ils ont en outre été présentés à l'occasion du séminaire [Chiche et Gilbert, 2010a] et de deux conférences internationales [Gilbert et Chiche, 2010, Chiche et Gilbert, 2010b].

5.1 Introduction

We consider the convex quadratic optimization problem that we write as follows

$$\begin{cases} \inf_x q(x) \\ l \leq Ax \leq u. \end{cases} \quad (5.1)$$

In that problem, the objective function

$$q : x \in \mathbb{R}^n \mapsto q(x) = g^\top x + \frac{1}{2} x^\top H x$$

is convex quadratic ($g \in \mathbb{R}^n$ and H is a positive semidefinite $n \times n$ matrix), A is an $m \times n$ matrix, and the bounds $l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^m$ and $u \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^m$ must satisfy $l < u$. The sign “ \top ” denotes transposition, so that $u^\top v = \sum_i u_i v_i$ is the Euclidean scalar product of the vectors u and v . Because of the possible infinite value of the components of l and u , we feel it necessary to give a precise definition of the frequently used interval

$$[l, u] := \{y \in \mathbb{R}^m : l \leq y \leq u\}. \quad (5.2)$$

Since H may vanish, the problem encompasses linear optimization. On the other hand, linear equality constraints, like $Ax = b$, can be expressed in (5.1) by adding two inequalities $Ax \leq b$ and $-Ax \leq -b$, so that our analysis also covers problems with linear equality constraints.

The augmented Lagrangian (AL) algorithm studied in this paper is defined by first introducing an auxiliary vector of variables $y \in \mathbb{R}^m$ and by rewriting (5.1) as follows

$$\begin{cases} \inf_{(x,y)} q(x) \\ Ax = y \\ l \leq y \leq u. \end{cases} \quad (5.3)$$

Given an *augmentation parameter* $r \geq 0$, the AL function $\ell_r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ is then defined at $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ by

$$\ell_r(x, y, \lambda) = q(x) + \lambda^\top (Ax - y) + \frac{r}{2} \|Ax - y\|^2, \quad (5.4)$$

where here and below $\|\cdot\|$ denotes the ℓ_2 -norm. For $r = 0$, one recovers the usual Lagrangian function, relaxing the equality constraints of (5.3) thanks to the *multiplier* or *dual variable* λ . The *AL algorithm* generates a sequence of dual variables $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}^m$ as follows. Knowing $r_k > 0$ and $\lambda_k \in \mathbb{R}^m$, the next dual iterate λ_{k+1} is computed by

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) \in \arg \min \{\ell_{r_k}(x, y, \lambda_k) : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u]\}, \quad (5.5)$$

$$\lambda_{k+1} := \lambda_k + r_k (Ax_{k+1} - y_{k+1}). \quad (5.6)$$

Next, r_k is updated by a rule that depends on the implementation and on which we pay much attention in this paper. The algorithm is presented with more details and further discussed at the end of this section. The quadratic optimization problem in (5.5) is called the *AL subproblem*.

This paper can be viewed as a continuation of the work initiated in [Delbos et Gilbert, 2005], in which the *global* linear convergence of the constraint norm to zero is highlighted, when (5.1) is *feasible*, i.e., when one can find a point $x \in \mathbb{R}^n$ such that $Ax \in [l, u]$ or, equivalently, when $\mathcal{R}(A) \cap [l, u] \neq \emptyset$ (we denote the range space of the matrix A by $\mathcal{R}(A) := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$). More specifically, it is shown that in this circumstance

$$\begin{aligned} \forall \beta > 0, \quad \exists L > 0, \quad \text{dist}(\lambda_0, \mathcal{S}_D) \leq \beta \quad \text{implies that} \\ \forall k \geq 1, \quad \|Ax_{k+1} - y_{k+1}\| \leq \min\left(\frac{L}{r_k}, 1\right) \|Ax_k - y_k\|, \end{aligned} \quad (5.7)$$

where \mathcal{S}_D denotes the necessarily nonempty set of optimal multipliers associated with the equality constraints of (5.3) and the operator ‘dist’ denotes the Euclidean distance. Computationally, this result is interesting because it allows the AL algorithm to tune the augmentation parameter r_k on the basis of the observed behavior of the constraint norm ratio $\|Ax_{k+1} - y_{k+1}\|/\|Ax_k - y_k\|$, from

the very first iteration. In [Gilbert, 2009a], r_k is increased if this ratio is larger than a desired rate of convergence, a value that can be reasonably prescribed by the solver user. Let us stress that it is the fact that the constraint norm inequality in (5.7) is valid from the first iteration, not only asymptotically in an unknown neighborhood of the unknown set \mathcal{S}_D , that makes this tuning possible. When the problem is infeasible, the constraint norm cannot, of course, tends to zero and the just described rule for tuning r_k makes the augmentation parameter blow up. In that case, the algorithm could stop if r_k jumps over some threshold, but one understands that it is difficult to specify a universal threshold and that such a value may be difficult to specify by the user of the code.

This paper gives more properties on the AL algorithm, with the aim at improving its stopping criterion when problem (5.1) is *infeasible*. Since, the AL algorithm is equivalent to the proximal (point) algorithm on the dual function, the present contribution is related to those works describing the behavior of the proximal method on monotone inclusion problems without solution [Rockafellar, 1976b, Bruck et Reich, 1977, Reich, 1977, Spingarn, 1987], but it goes a little further, by taking advantage of the special structure of the quadratic optimization problem (5.1). In addition, the way how the penalty parameters r_k intervene in the speed of convergence is highlighted.

One assumption is crucial for making the AL algorithm consistent for infeasible problems. Since $[l, u] \neq \emptyset$, it is always possible to find a *shift* $s \in \mathbb{R}^m$ such that the *shifted constraints* $l \leq Ax + s \leq u$ are feasible for some $x \in \mathbb{R}^n$; let us call such an s a *feasible shift*. The feasible shifts are clearly those vectors s in the set

$$\mathcal{S} := [l, u] + \mathcal{R}(A). \quad (5.8)$$

The fundamental assumption of this study is that for some shift $s \in \mathcal{S}$ (or any such feasible shift, as this will be clarified by proposition 5.6), the *shifted quadratic optimization problem*

$$\begin{cases} \inf_x q(x) \\ l \leq Ax + s \leq u \end{cases} \quad (5.9)$$

has a solution. This assumption is essential in the present context because it is equivalent to saying that each AL subproblem (5.5) has a solution (proposition 5.6), so that the AL algorithm is consistent if and only if that fundamental assumption holds.

Since \mathcal{S} is a nonempty closed convex set (it is a convex polyhedron containing $[l, u]$), there is also one and only one smallest shift $\bar{s} \in \mathcal{S}$, which is the projection of zero on \mathcal{S} :

$$\bar{s} := \arg \min_{s \in \mathcal{S}} \|s\|. \quad (5.10)$$

Of course $\bar{s} = 0$ if and only if problem (5.1) is feasible. Problem (5.9) with $s = \bar{s}$ is called in this paper the *closest feasible problem*. Computing \bar{s} is not easier than computing a solution to a feasible quadratic problem like (5.1), so that this smallest feasible shift is not computed before running the AL algorithm. We will see, however, that in the AL algorithm the following dual-function subgradients

$$s_k := y_k - Ax_k \quad (5.11)$$

converge *globally* linearly to \bar{s} , just like in (5.7) but with s_k replaced by $s_k - \bar{s}$ in the second line (theorem 5.22). This result is partly due to the fact that \bar{s} is also the smallest subgradient of the dual function δ associated with problem (5.1) (it will be shown in proposition 5.10, indeed, that the set of all subgradients of δ , denoted $\mathcal{R}(\partial\delta)$, is identical to \mathcal{S}) and that the AL algorithm tries to find a multiplier $\bar{\lambda}$ such that $\partial\delta(\bar{\lambda})$ contains that smallest subgradient \bar{s} .

The minimum shift \bar{s} is not known when the AL algorithm is running, so that it is less straightforward to use that new global linear convergence for updating the parameter r_k , than it was when $\bar{s} = 0$. We propose instead to use the differences $s'_k := s_{k+1} - s_k$, which also converge globally linearly to zero (a known limit point this time!), provided r_k is sufficiently large. Finally, this analysis results

in a new update rule for r_k , which maintains bounded the generated sequence of augmentation parameters even for an infeasible problem (section 5.4.1) and which computes the smallest feasible shift \bar{s} at a global linear speed.

Another source of motivation for the present work, to add further to [Delbos et Gilbert, 2005], is a result on the minimization of a *strictly* convex quadratic function q subject to *infeasible* linear *equality* constraints $Ax = b$ (the result was claimed without proof in [Fortin et Glowinski, 1982, remarque 5.6, page 42] and [Glowinski et Le Tallec, 1989, remark 2.13, page 65]): the primal sequence generated by the AL algorithm converges globally linearly to the solution to the weakly constrained problem

$$\begin{cases} \inf_x q(x) \\ A^T(Ax - b) = 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Therefore, this paper can also be viewed as an extension of the Fortin-Glowinski-LeTallec result to the minimization of a *convex* function (*strict* convexity is no longer required) subject to incompatible *inequality* constraints. Without strict convexity, however, the convergence of the primal sequence is no longer ensured, so that the presented linear convergence result is related to the constraint values, instead. Another contribution comes from the impact of the values of the penalty parameters r_k on the speed of convergence: the larger the parameters, the faster the convergence will be; this is an expected property of the AL algorithm.

Notation

We denote by \mathbb{N} the set of nonnegative integers, by $\llbracket 1, p \rrbracket := \{1, \dots, p\}$ the set of the first p nonzero integers, by \mathbb{R} the set of real numbers, and set $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.

The notation and concepts of convex analysis that we employ are standard [Rockafellar, 1970, Hiriart-Urruty et Lemaréchal, 1993, Borwein et Lewis, 2000]. Let \mathbb{E} be a finite dimensional vector space (below, \mathbb{E} is some \mathbb{R}^p). The asymptotic cone of a nonempty closed convex set $C \subseteq \mathbb{E}$ is denoted by $C^\infty := \{d \in \mathbb{E} : C + d \subseteq C\}$. We denote by \mathcal{I}_S the indicator function of a set $S \subseteq \mathbb{E}$: $\mathcal{I}_S(x) = 0$ if $x \in S$, $\mathcal{I}_S(x) = +\infty$ if $x \notin S$. The domain of a function $f : \mathbb{E} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ is defined and denoted by $\text{dom } f := \{x \in \mathbb{E} : f(x) < +\infty\}$ and its epigraph by $\text{epi } f := \{(x, \alpha) \in \mathbb{E} \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$. As in [Hiriart-Urruty et Lemaréchal, 1993], $\text{Conv}(\mathbb{E})$ is the set of functions $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ that are convex (i.e., $\text{epi } f$ is convex) and proper (i.e., $\text{epi } f \neq \emptyset$); while $\text{C}\overline{\text{onv}}(\mathbb{E})$ is the subset of $\text{Conv}(\mathbb{E})$ of those functions f that are also closed (i.e., $\text{epi } f$ is closed).

Suppose now that \mathbb{E} is endowed with a scalar product denoted by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (below, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the standard Euclidean scalar product of some $\mathbb{E} = \mathbb{R}^p$). The normal cone to a set $S \subseteq \mathbb{E}$ at $x \in C$ is denoted by $N_C(x) := \{\nu \in \mathbb{E} : \langle \nu, y - x \rangle \leq 0, \text{ for all } y \in C\}$. The Fenchel conjugate of $f \in \text{Conv}(\mathbb{E})$ is the function $f^* \in \text{C}\overline{\text{onv}}(\mathbb{E})$ defined at $s \in \mathbb{E}$ by $f^*(s) = \sup\{\langle s, x \rangle - f(x) : x \in \mathbb{E}\}$. The biconjugate f^{**} of f is the conjugate of f^* ; its value at $x \in \mathbb{E}$ is given by $f^{**}(x) = \sup\{\langle s, x \rangle - f^*(s) : s \in \mathbb{E}\}$; it is known that $f^{**} = f$ if and only if $f \in \text{C}\overline{\text{onv}}(\mathbb{E})$. The subdifferential at $x \in \mathbb{E}$ of $f \in \text{Conv}(\mathbb{E})$ is denoted by $\partial f(x) := \{s \in \mathbb{E} : f(x) + f^*(s) = \langle s, x \rangle\}$; it is known that the multifunction $x \mapsto \partial f(x)$ is monotone, i.e., $\langle s_2 - s_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$ whenever for $i = 1, 2$, $x_i \in \mathbb{E}$, and $s_i \in \partial f(x_i)$. The orthogonal projector on $[l, u]$ is denoted by $P_{[l, u]}$.

The standard augmented Lagrangian algorithm

We conclude this introduction by setting forth precisely the classical AL algorithm that is analyzed in this paper. The algorithm will be rewritten in section 5.4.2 in a version that incorporates the results of this paper and only differs on the stopping criterion (step 3) and the way the augmentation parameter is updated (step 4). It is described below as though computation were done in exact

arithmetic.

AL ALGORITHM to solve (5.1)

Initialization: choose $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ and $r_0 > 0$.

Repeat for $k = 0, 1, 2, \dots$

1. If the feasible problem

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R} \times [l,u]} \ell_{r_k}(x, y, \lambda_k) \quad (5.13)$$

has no solution, exit with a direction $d \in \mathbb{R}^n$ such that

$$g^\top d < 0, \quad Hd = 0, \quad \text{and} \quad Ad \in [l, u]^\infty. \quad (5.14)$$

Otherwise, denote a solution to (5.13) by (x_{k+1}, y_{k+1}) .

2. Update the multiplier

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + r_k(Ax_{k+1} - y_{k+1}). \quad (5.15)$$

3. Stop if

$$Ax_{k+1} = y_{k+1}. \quad (5.16)$$

4. Choose a new augmentation parameter: $r_{k+1} > 0$.

This algorithm deserves some comments.

1. It is shown in proposition 5.6 below that if the AL subproblem (5.13) has no solution, then the closest feasible QP is unbounded and the subproblem (5.13) has no solution for any $\lambda_k \in \mathbb{R}^m$ and any $r_k > 0$. Therefore this situation is detected at the very first iteration.
2. The fact that a direction $d \in \mathbb{R}^n$ satisfying (5.14) can be found when the closest feasible QP has no solution is a consequence of lemma 5.2 below; see remark 5.4. Such a direction is useful in the context of the SQP algorithm.
3. The AL subproblem (5.13) may have many solutions (x_{k+1}, λ_{k+1}) . Despite that fact, the next multiplier λ_{k+1} is uniquely determined by (5.15). This is discussed after lemma 5.5.
4. The stopping criterion in step 3 is only valid if the QP (5.1) is feasible, since otherwise $Ax_{k+1} = y_{k+1} \in [l, u]$ cannot be satisfied. The proposed stopping criterion is based on the fact that, when the QP is feasible, a pair (x_{k+1}, y_{k+1}) satisfying (5.16) at this stage of the algorithm is necessarily a solution to (5.1). This stopping criterion will be modified for dealing with infeasible problems in the improved AL algorithm presented in section 5.4.2.
5. The update of the augmentation parameter in step 4 largely depends on the implementation. The rule proposed in [Delbos et Gilbert, 2005] will be adapted to infeasible problems in the improved AL algorithm of section 5.4.2.

The AL algorithm has a long history that cannot be retraced here. Let us mention, however, that it was introduced for equality constrained optimization problems by Hestenes and Powell [Hestenes, 1969, Powell, 1969], and afterwards extended to inequality constrained problems by Rockafellar, Buys, Arrow, Gould, and Howe in [Rockafellar, 1971, Buys, 1972, Rockafellar, 1973b, Arrow et col., 1973, Rockafellar, 1974a]. More recently, its properties when it solves more structured problems have been investigated: [Dostál et col., 1999, Dostál et col., 2000, Dostál et col., 2003, Delbos et Gilbert, 2005, Dean et Glowinski, 2006, Friedlander et Leyffer, 2008] consider quadratic optimization problems, [Malick, 2004, Malick et col., 2009, Henrion et Malick, 2009] SDP problems, and [Shapiro et Sun, 2004] cone constrained optimization problems.

5.2 Problem structure

5.2.1 On quadratic optimization

Let us denote by $\text{val}(P) \in \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ the optimal value of an optimization problem (P) , with the convention that $\text{val}(P) = +\infty$ if (P) is an *infeasible minimization* problem. We say that a feasible minimization problem (P) is *unbounded* if $\text{val}(P) = -\infty$ and *bounded* if $\text{val}(P) > -\infty$.

We quote below two results on the quadratic problem (5.1) that will be useful below. The first one recalls the famous characterization of the existence of solution established by Frank and Wolfe (see [Frank et Wolfe, 1956, appendix (i)] which does not assume convexity and [Bonnans et col., 2006, theorem 19.1] for a different proof assuming that q is convex). The second one characterizes the unboundedness of (5.1) in terms of the existence of a direction d that has interesting theoretical and numerical properties.

Lemma 5.1 (solvable QP). *The convex quadratic optimization problem (5.1) has a solution if and only if $\text{val}(5.1) \in \mathbb{R}$ (i.e., (5.1) is feasible and bounded).*

Lemma 5.2 (unbounded QP). *Suppose that the convex quadratic optimization problem (5.1) is feasible. Then the problem is unbounded if and only if there is a direction $d \in \mathbb{R}^n$ such that*

$$g^\top d < 0, \quad Hd = 0, \quad \text{and} \quad Ad \in [l, u]^\infty. \quad (5.17)$$

PROOF. It is clear that the conditions (5.17) imply the unboundedness of the feasible problem (5.1) since, given an arbitrary feasible point x_0 , the points $x_k = x_0 + kd$ for $k \in \mathbb{N}$ are feasible and $q(x_k) = q(x_0) + k(g^\top d) \rightarrow -\infty$ when $k \rightarrow \infty$.

Let us now show that the conditions (5.17) are necessary. If problem (5.1) is unbounded, there is a sequence $\{x_k\}$ of feasible points such that $q(x_k) \rightarrow -\infty$. By the continuity of q , the sequence $\{x_k\}$ must be unbounded. Extracting a sequence if necessary, one can assume that $x_k/\|x_k\|$ converges to some unit norm vector d , which, by $H \succcurlyeq 0$, necessarily satisfies

$$g^\top d \leq 0, \quad Hd = 0, \quad \text{and} \quad Ad \in [l, u]^\infty. \quad (5.18)$$

We pursue by induction on the dimension n , taking inspiration from the proof of lemma 5.1 by Franck and Wolfe [Frank et Wolfe, 1956, appendix (i)].

- If $n = 1$, (5.18) implies (5.17), since otherwise $g^\top d = 0$ and, for any $x \in \mathbb{R}$, $q(x) = q(\pm xd) = 0$ (since $d \in \{-1, 1\}$), implying that problem (5.1) would be bounded.
- Suppose now that the conditions in (5.17) hold for all dimensions $< n$ and let us prove them for n . If $g^\top d < 0$, (5.17) is just (5.18). Otherwise $g^\top d = 0$ and the function q is constant along the direction d . There are now two complementary subcases to consider (we denote by $P := \{x : Ax \in [l, u]\}$ the feasible set of problem (5.1)).

If $x'_k := x_k - (d^\top x_k)d \in P$ for a subsequence of indices $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$, then $x'_k \in P' := P \cap \{d\}^\perp$ (since $\|d\| = 1$). Furthermore, $q(x'_k) = q(x_k) \rightarrow -\infty$, so that the quadratic problem consisting of minimizing q on P' is unbounded. Since $\dim P' < n$ (because $\{d\}^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$), the recurrence assumption implies that there exists a direction d' such that $g^\top d' < 0$, $Hd' = 0$, and $d' \in (P')^\infty \subseteq P^\infty = \{h : Ah \in [l, u]^\infty\}$, which is a desired direction.

If $x'_k \notin P$ for k larger than some index k_1 , then, for each $k \geq k_1$, there is an $\alpha_k \in \mathbb{R}$ such that $x''_k := x_k + \alpha_k d$ is on the boundary of the feasible set P of (5.1). Since that boundary is formed of a finite number of polyhedral sets P_i of dimension $< n$ and since $q(x''_k) = q(x_k) \rightarrow -\infty$, one of these polyhedron, say P_j , must contain an unbounded subsequence of $\{x''_k\}$ that again satisfies $q(x''_k) \rightarrow -\infty$. The conclusion now follows from the induction assumption since $\dim P_j < n$ and $P_j^\infty \subseteq P^\infty$. \square

Remark 5.3. Lemma 5.2 no longer holds if the feasible set is an arbitrary closed convex set. For example $\inf\{x_1 : (x_1, x_2) \in C\} = -\infty$ if $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_1^2\}$, but $C^\infty = \mathbb{R}_+\{d\}$, where $d = (0, 1)$, while $g^\top d = 0$. \square

Remark 5.4. If we apply lemma 5.2 to the feasible problem (5.13) with $r > 0$, we see that it has no solution if and only if there is a direction $(d_x, d_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ such that

$$g^\top d_x + \lambda^\top (Ad_x - d_y) < 0, \quad \begin{pmatrix} H + rA^\top A & -rA^\top \\ -rA & rI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = 0, \quad \text{and} \quad d_y \in [l, u]^\infty.$$

These conditions are equivalent to (5.14) and $(d_x, d_y) = (d, Ad)$. \square

5.2.2 The dual function

We introduce a *Lagrangian* of problem (5.3) by dualizing its equality constraints. It is the function $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ defined at (x, y, λ) by

$$\ell(x, y, \lambda) = q(x) + \lambda^\top (Ax - y). \quad (5.19)$$

The *dual function* $\delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ associated with problem (5.3) is then defined at λ by

$$\delta(\lambda) := - \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \ell(x, y, \lambda). \quad (5.20)$$

With the minus sign in front of the infimum, this function is convex, closed, and does not take the value $-\infty$. Therefore,

$$\text{dom } \delta \neq \emptyset \quad \iff \quad \delta \in \text{Conv}(\mathbb{R}^m). \quad (5.21)$$

For $r > 0$, the *Moreau-Yosida regularisation* of the dual function δ described in [Moreau, 1965, Hiriart-Urruty et Lemaréchal, 1993] is the function $\delta_r : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ defined at $\lambda \in \mathbb{R}^m$ by

$$\delta_r(\lambda) = \inf_{\mu \in \mathbb{R}^m} \left(\delta(\mu) + \frac{1}{2r} \|\mu - \lambda\|^2 \right). \quad (5.22)$$

A fundamental tool to study the properties of the AL algorithm is the following result by Rockafellar [Rockafellar, 1973a], which is particularized below to the present context; this result is indeed also valid for general convex optimization problems. We recall the definition of the *augmented Lagrangian* of problem (5.3), which is the function $\ell_r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ defined at (x, y, λ) by

$$\ell_r(x, y, \lambda) = q(x) + \lambda^\top (Ax - y) + \frac{r}{2} \|Ax - y\|^2. \quad (5.23)$$

Lemma 5.5 (AL and proximality). *Suppose that the dual function δ defined by (5.20) is in $\text{Conv}(\mathbb{R}^m)$ and let $r > 0$. Then $\delta_r(\lambda)$ defined by (5.22) verifies*

$$\delta_r(\lambda) = - \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \ell_r(x, y, \lambda). \quad (5.24)$$

Furthermore, the unique solution λ_+ to the problem in the right hand side of (5.22) is linked to an arbitrary solution (x_+, y_+) to the problem in the right hand side of (5.24) by

$$\lambda_+ = \lambda + r(Ax_+ - y_+) \quad \text{and} \quad y_+ - Ax_+ \in \partial\delta(\lambda_+).$$

The unique solution λ_+ to the problem in the right hand side of (5.22) is called the *proximal point* of λ associated with δ and $r > 0$ and is denoted in this paper by

$$\text{prox}_{\delta,r}(\lambda) := \arg \min_{\mu \in \mathbb{R}^m} \left(\delta(\mu) + \frac{1}{2r} \|\mu - \lambda\|^2 \right). \quad (5.25)$$

Hence, according the lemma 5.5, the multipliers λ_k generated by the AL algorithm satisfy

$$\lambda_{k+1} = \text{prox}_{\delta,r_k}(\lambda_k) \quad \text{and} \quad s_{k+1} \in \partial\delta(\lambda_{k+1}). \quad (5.26)$$

Hence the multiplier λ_{k+1} computed by the AL algorithm is uniquely determined, although the AL subproblem in (5.5) may have many solutions (x_{k+1}, y_{k+1}) . These facts are sufficient reasons explaining the importance of the dual function in the analysis of the AL algorithm.

To be comprehensive and clear up any ambiguity, we feel it necessary to restate and proof proposition 3.3 from [Delbos et Gilbert, 2005] in the present context, in which problem (5.1) may have no solution (infeasibility or unboundedness); in places, we use a different argument (lemma 5.2), which makes the proof shorter. The proposition establishes a link between properties of three different objects: the nonemptiness of the dual function domain, the solvability of the feasible shifted quadratic problems, and the solvability of the AL subproblems.

Proposition 5.6 (three aspects of the AL subproblem solvability). *Let be given $s \in \mathcal{S} := [l, u] + \mathcal{R}(A)$, $r > 0$, and $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Then the following three properties are equivalent:*

- (i) $\text{dom } \delta \neq \emptyset$,
- (ii) the feasible shifted quadratic problem (5.9) has a solution,
- (iii) the augmented Lagrangian subproblem in (5.24) has a solution.

PROOF. [(i) \Rightarrow (iii)] Since $\text{dom } \delta \neq \emptyset$, $\delta \in \overline{\text{Conv}}(\mathbb{R}^m)$ by (5.21), so that the optimal value $\delta_r(\lambda)$ of the problem in the right hand side of (5.22) is finite. By lemma 5.5, the optimal value of problem in (5.24) is also finite. As a feasible bounded convex quadratic problem, the problem in (5.24) must have a solution (lemma 5.1).

[(iii) \Rightarrow (ii)] We proceed by contradiction. Suppose that the feasible problem (5.9) has no solution. Then this problem is unbounded (lemma 5.1) and there is a direction $d \in \mathbb{R}^n$ such that (5.17) holds (lemma 5.2 and $[l - s, u - s]^\infty = [l, u]^\infty$). Now, by applying lemma 5.2 to problem (5.13), we see that the existence of such a direction d implies that problem (5.13) has no solution (remark 5.4).

[(ii) \Rightarrow (i)] Let $(\bar{x}, \bar{\lambda}^l, \bar{\lambda}^u)$ be a primal-dual solution to the feasible shifted problem (5.9), where $\bar{\lambda}^l$ [resp. $\bar{\lambda}^u$] is the multiplier associated with the lower [resp. upper] bound. Then $(\bar{x}, A\bar{x} + s, \bar{\lambda}^l, \bar{\lambda}^u)$ is a primal-dual solution to the optimization problem in (5.20) with $\lambda = \bar{\lambda}^u - \bar{\lambda}^l$; hence $\delta \neq +\infty$. \square

We can now precise the general assumption made throughout this paper in the form of three equivalent properties. This equivalence is a consequence of proposition 5.6

Assumption 5.7. The following equivalent properties hold:

$$\text{dom } \delta \neq \emptyset \quad \text{equivalent to} \quad \delta \in \overline{\text{Conv}}(\mathbb{R}^m), \quad (5.27)$$

$$\exists s \in \mathbb{R}^m : \quad (5.9) \text{ has a solution,} \quad (5.28)$$

$$\forall s \in \mathcal{S} : \quad (5.9) \text{ has a solution.} \quad (5.29)$$

In this paper, we are interested in infeasible problems of the form (5.1). The following proposition gives an expression of feasibility in terms of the dual function (5.20). That proposition and the proximal interpretation of the AL algorithm of lemma 5.5 readily imply that, for an infeasible problem, the sequence $\{\lambda_k\}$ generated by the AL algorithm is unbounded.

Proposition 5.8 (feasibility and dual function). *Suppose that assumption 5.7 holds. Then, the following two properties are equivalent:*

- (i) *problem (5.1) is feasible,*
- (ii) *the dual function δ is bounded below.*

PROOF. [(i) \Rightarrow (ii)] When problem (5.1) is feasible, there is some x_0 such that $y_0 := Ax_0 \in [l, u]$. It follows from the definition (5.20) of δ that, for any $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\delta(\lambda) \geq -q(x_0)$; hence δ is bounded below by $-q(x_0) \in \mathbb{R}$.

[(ii) \Rightarrow (i)] Since $\text{dom } \delta \neq \emptyset$ by (5.27), $\delta(\lambda) \in \mathbb{R}$ for some $\lambda \in \mathbb{R}^m$. On the other hand, since \bar{s} defined by (5.10) is the projection of 0 on $\mathcal{S} := [l, u] + \mathcal{R}(A)$, there holds

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u] : \quad (y - Ax)^\top \bar{s} \geq \|\bar{s}\|^2.$$

Then, for all $t \geq 0$:

$$\delta(\lambda - t\bar{s}) = - \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \left[q(x) + (\lambda - t\bar{s})^\top (Ax - y) \right] \leq \delta(\lambda) - t\|\bar{s}\|^2.$$

Since δ is bounded below, there must hold $\bar{s} = 0$, i.e., problem (5.1) is feasible. \square

Let us introducing an auxiliary vector of variables $y \in \mathbb{R}^m$ in the shifted quadratic optimization problem (5.9), which then reads

$$\begin{cases} \inf_{x,y} q(x) \\ Ax + s = y \\ l \leq y \leq u. \end{cases} \quad (5.30)$$

Its optimal value leads to the *value function* $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ of problem (5.1), whose value at $s \in \mathbb{R}^m$ is therefore

$$v(s) := \inf \{ q(x) : Ax + s \in [l, u], x \in \mathbb{R}^n \}. \quad (5.31)$$

Clearly, since $\mathcal{S} = [l, u] + \mathcal{R}(A)$:

$$\text{dom } v = \mathcal{S}.$$

In convex optimization, it is well known and easy to see that the dual function can be introduced from the value function by $\delta = v^*$ (the conjugate function of v for the Euclidean scalar product, see [Rockafellar, 1974b, theorem 7]), so that $\delta^* = v^{**}$. For a convex *quadratic* optimization problem, we show below that $\delta^* = v$. As highlighted by the proof, this identity rests on the fact that $v(s)$ is the optimal value of the shifted quadratic optimization problem (5.30), that $\delta^*(s)$ is the optimal value of its dual, and that there is no duality gap when assumption 5.7 holds.

Proposition 5.9 (dual function conjugate). *If assumption 5.7 holds,*

$$\delta^* = v \in \text{Con}\bar{\text{v}}(\mathbb{R}^m).$$

PROOF. By assumption (5.27), $\delta \in \text{Conv}(\mathbb{R}^m)$, so that $\delta^* \in \text{Con}\bar{\text{v}}(\mathbb{R}^m)$ [Rockafellar, 1970, theorem 12.2]. Therefore, it remains to prove the equality $\delta^* = v$. Let $s \in \mathbb{R}^m$. From its definition, $v(s)$ is the optimal value of problem (5.30) and therefore also the optimal value of the problem obtained by dualizing its equality constraint:

$$v(s) = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \left(q(x) + \lambda^\top (Ax + s - y) \right).$$

The min-max dual of that problem reads

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \left(q(x) + \lambda^\top (Ax + s - y) \right) \\
 &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \left[s^\top \lambda + \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \left(q(x) + \lambda^\top (Ax - y) \right) \right] \\
 &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \left[s^\top \lambda - \delta(\lambda) \right] \quad [\text{definition of } \delta] \\
 &= \delta^*(s) \quad [\text{definition of } \delta^*].
 \end{aligned}$$

By weak duality, $\delta^*(s) \leq v(s)$. We show that equality holds by considering two mutually exclusive cases, $v(s) = +\infty$ and $v(s) \in \mathbb{R}$, one of which must occur (since by assumption 5.7, $v(s) > -\infty$).

- If $v(s) = +\infty$, then $s \notin \mathcal{S}$. If \hat{s} is the projection of s on \mathcal{S} , then $\mu := \hat{s} - s \neq 0$ and

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u] : \quad (y - Ax)^\top \mu \geq \hat{s}^\top \mu.$$

Therefore, for all $t \geq 0$:

$$\delta(\lambda - t\mu) = - \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \left[q(x) + (\lambda - t\mu)^\top (Ax - y) \right] \leq \delta(\lambda) - t \hat{s}^\top \mu.$$

Finally, for $\lambda \in \text{dom } \delta$ (which is nonempty by assumption 5.7) and $t \geq 0$,

$$\delta^*(s) = \sup_{\lambda' \in \mathbb{R}^m} s^\top \lambda' - \delta(\lambda') \geq s^\top (\lambda - t\mu) - \delta(\lambda - t\mu) \geq s^\top \lambda - \delta(\lambda) + t \|\mu\|^2.$$

Since $t \geq 0$ is arbitrary and $\mu \neq 0$, $\delta^*(s) = +\infty$.

- If $v(s) \in \mathbb{R}$, then problem (5.30) has a solution $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times [l, u]$ (lemma 5.1). That problem also has an optimal multiplier $\bar{\lambda}$ associated with the affine constraint $Ax + s = y$. Then, the pair $((\bar{x}, \bar{y}), \bar{\lambda})$ is a saddle-point of the Lagrangian $((x, y), \lambda) \mapsto q(x) + \lambda^\top (Ax + s - y)$, which implies that there is no duality gap: $\delta^*(s) = v(s)$. \square

Note that when assumption 5.7 does not hold, then $\text{dom } \delta = \emptyset$ and $\delta^* \equiv -\infty$, while $v(s) = +\infty$ when $s \notin \mathcal{S}$; therefore $\delta^* \neq v$ on the complementary set of \mathcal{S} (both δ and v take the value $-\infty$ on \mathcal{S}).

We denote by

$$\mathcal{R}(\partial\delta) := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \partial\delta(\lambda),$$

the set of all the subgradients of the dual function or, equivalently, the range space of the multifunction $\lambda \mapsto \partial\delta(\lambda)$. Since the multipliers λ are in the dual of the constraint range space (here, the dual of \mathbb{R}^m), a subgradient of the dual function is in the dual of the dual of the constraint range space, hence in the constraint range space (here, \mathbb{R}^m). The next proposition shows that $\mathcal{R}(\partial\delta)$ is, actually, the set \mathcal{S} of the feasible shifts, which is indeed a part of the constraint range space. This result is not without surprise, since \mathcal{S} only depends on the objects defining the constraint set (here A , l , and u), while δ also depends on the quadratic objective q .

Proposition 5.10 (dual subdifferential). *Suppose that assumption 5.7 holds. Then, the following properties are equivalent*

- (i) $s \in \partial\delta(\lambda)$,
- (ii) $\lambda \in \partial v(s)$,
- (iii) $s \in \mathcal{S}$ and any solution to problem (5.30) minimizes the Lagrangian $\ell(\cdot, \cdot, \lambda)$ on $\mathbb{R}^n \times [l, u]$.
- (iv) $s \in \mathcal{S}$ and there is a feasible pair for problem (5.30) that minimizes the Lagrangian $\ell(\cdot, \cdot, \lambda)$ on $\mathbb{R}^n \times [l, u]$.

5.2. PROBLEM STRUCTURE

In addition

$$\mathcal{R}(\partial\delta) = \mathcal{S}. \quad (5.32)$$

PROOF. Before proving the equivalences, let us recall that $\delta \in \text{Conv}(\mathbb{R}^m)$ by (5.27), so that

$$s \in \partial\delta(\lambda) \iff \delta(\lambda) + \delta^*(s) = s^\top \lambda. \quad (5.33)$$

[(i) \Leftrightarrow (ii)] Since $\delta \in \overline{\text{Conv}}(\mathbb{R}^m)$ by (5.27), $s \in \partial\delta(\lambda)$ if and only if $\lambda \in \partial\delta^*(s)$ [Rockafellar, 1970, theorem 23.5]. By proposition 5.9, the property $s \in \partial\delta^*(\lambda)$ is now equivalent to $\lambda \in \partial v(s)$.

[(i) \Rightarrow (iii)] Let $s \in \partial\delta(\lambda)$. Then, by the left-right implication in (5.33) and proposition 5.9, $\delta^*(s) = v(s)$ must be finite, so that $s \in \mathcal{S}$ and problem (5.30) has a solution. Let (x_s, y_s) be an arbitrary solution to (5.30). Then

$$\begin{aligned} \ell(x_s, y_s, \lambda) &= q(x_s) - s^\top \lambda && [Ax_s + s = y_s] \\ &= v(s) - s^\top \lambda && [\text{definition of } v] \\ &= \delta^*(s) - s^\top \lambda && [\text{proposition 5.9}] \\ &= -\delta(\lambda) && [(5.33) \text{ and } s \in \partial\delta(\lambda)] \\ &= \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \ell(x, y, \lambda) && [\text{definition of } \delta \text{ in (5.20)}]. \end{aligned}$$

This shows the minimality property of (x_s, y_s) .

[(iii) \Rightarrow (iv)] Clear since problem (5.30) has a solution when $s \in \mathcal{S}$ and assumption 5.7 holds.

[(iv) \Rightarrow (i)] Let (x_s, y_s) be a feasible point of problem (5.30) with the minimality property mentioned in (iv). Then for any $\mu \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} s^\top \mu - \delta(\mu) &\leq q(x_s) + \mu^\top (Ax_s - y_s + s) && [\text{definition of } \delta \text{ in (5.20)}] \\ &= q(x_s) + \lambda^\top (Ax_s - y_s + s) && [\text{feasibility of } (x_s, y_s)] \\ &= s^\top \lambda + \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} q(x) + \lambda^\top (Ax - y) && [\text{minimality property of } (x_s, y_s)] \\ &= s^\top \lambda - \delta(\lambda) && [\text{definition of } \delta \text{ in (5.20)}]. \end{aligned}$$

Therefore λ minimizes $\mu \in \mathbb{R}^n \mapsto \delta(\mu) - s^\top \mu$, which implies that $s \in \partial\delta(\lambda)$.

[(5.32)] The inclusion $\mathcal{R}(\partial\delta) \subseteq \mathcal{S}$ was shown during the proof of (i) \Rightarrow (iii). The inclusion $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}(\partial\delta)$ was shown during the proof of (iv) \Rightarrow (i). \square

A proof of (5.32) can almost be obtained by using general arguments. Note first that for any function $\delta \in \overline{\text{Conv}}(\mathbb{R}^m)$, not necessarily a dual function, there holds

$$\text{ri dom } \delta^* \subseteq \mathcal{R}(\partial\delta) \subseteq \text{dom } \delta^*,$$

where ‘ri’ denotes the relative interior [Rockafellar, 1970, p. 227], so that the closure $\text{cl } \mathcal{R}(\partial\delta) = \text{cl dom } \delta^*$. Now, for the dual function δ of problem (5.1), we have by proposition 5.9, $\text{cl } \mathcal{R}(\partial\delta) = \text{cl dom } v = \text{cl } \mathcal{S}$, which would yield (5.32) if we knew that $\mathcal{R}(\partial\delta)$ is close (in our case, \mathcal{S} is clearly closed as the sum of two convex polyhedra). The closure of this set is actually a by-product of the proposed proof of (5.32) and is linked to the existence of an optimal multiplier associated with the equality constraint of (5.30). As shown by the following examples, the identity (5.32) is typical to convex *quadratic* problems.

Example 5.11 (\mathcal{S} not closed). For a non-quadratic problem, \mathcal{S} may not be closed. Consider indeed the constraint set $\{x \in \mathbb{R} : e^x \leq 0\}$. Then, the set of feasible shifts reads $\mathcal{S} := \{s \in \mathbb{R} : \text{there exists an } x \text{ such that } e^x + s \leq 0\} = \{s \in \mathbb{R} : s < 0\}$ and this set is open. \square

Example 5.12 (strict inclusion $\mathcal{R}(\partial\delta) \subset \mathcal{S}$). For a non-quadratic problem, one can also have the situation in which \mathcal{S} is closed but strictly larger than $\mathcal{R}(\partial\delta)$. Consider the problem $\inf\{x_1 + x_2 : x_2 \leq 0, x_1^2 \leq x_2\}$. Then $\mathcal{S} := \{s \in \mathbb{R}^2 : x_2 + s_1 \leq 0, x_1^2 + s_2 \leq x_2\} = \{s \in \mathbb{R}^2 : s_1 + s_2 \leq 0\}$,

$$\delta(\lambda) = \begin{cases} (4\lambda_2)^{-1} & \text{if } \lambda_2 = \lambda_1 + 1 > 0 \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and} \quad \delta^*(s) = \begin{cases} -s_1 & \text{if } s_1 + s_2 \leq 0 \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

One deduces from this that, if $\lambda_2 = \lambda_1 + 1 > 0$, $s \in \partial\delta(\lambda)$ if and only if $4(s_1 + s_2)(\lambda_1 + 1)\lambda_2 = 1$. Hence $s = 0 \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{R}(\partial\delta)$. This is essentially due to the fact that the original problem has a solution (with no constraint shift, so that $s = 0$) but no optimal multiplier. \square

The global linear convergence of the AL algorithm is based on the following quasi-global error bound on the dual solution set

$$\mathcal{S}_D := \{\lambda \in \mathbb{R}^m : 0 \in \partial\delta(\lambda)\} \tag{5.34}$$

of the feasible QP (5.3) [Delbos et Gilbert, 2005, proposition 4.4].

Lemma 5.13 (quasi-global error bound). *Consider problem (5.3) with $H \succcurlyeq 0$ and suppose that it has a solution. Then*

$$\begin{aligned} &\text{for any bounded set } \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^m, \text{ there is an } L > 0, \text{ such that} \\ &\forall \lambda \in \mathcal{S}_D + \mathcal{B}, \quad \forall s \in \partial\delta(\lambda) : \quad \text{dist}(\lambda, \mathcal{S}_D) \leq L \|s\|. \end{aligned} \tag{5.35}$$

We use the word *quasi-global* to qualify this error bound since the constant L in (5.35) depends on the bounded set \mathcal{B} and may be infinite (i.e., may not exist) if $\mathcal{B} = \mathbb{R}^m$. This is the case for instance for the feasible problem $\inf_{x \in \mathbb{R}}\{0 : -1 \leq 0x \leq 1\}$ [Delbos et Gilbert, 2005, example 4.3], for which the dual function is $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \delta(\lambda) = |\lambda|$, so that $\mathcal{S}_D = \{0\}$ and the last inequality in (5.35) reads $|\lambda| \leq L$, which, obviously, cannot hold for all $\lambda \in \mathbb{R}$. The necessity to use a bounded set \mathcal{B} will imply no restriction on the global linear convergence of theorem 5.22, since it will be possible to choose \mathcal{B} such the $\lambda_0 \in \mathcal{S}_D + \mathcal{B}$ implies that the next dual iterates $\lambda_k \in \mathcal{S}_D + \mathcal{B}$ (point (i) of proposition 5.21). Now, when problem (5.1) is infeasible, $\mathcal{S}_D = \emptyset$, but lemma 5.35 will be used with the dual solution set $\tilde{\mathcal{S}}_D$ of the closest feasible problem (see section 5.2.4).

5.2.3 The smallest feasible shift

The smallest feasible shift \bar{s} is defined by (5.10) as the smallest element in $\mathcal{S} = [l, u] + \mathcal{R}(A)$. Clearly, \bar{s} is perpendicular to $\mathcal{R}(A)$, which reads

$$A^T \bar{s} = 0. \tag{5.36}$$

The next lemma gives conditions equivalent to the fact that a pair (\bar{x}, \bar{y}) realizes at best the constraint $Ax = y$, in the ℓ_2 -norm sense:

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \|Ax - y\|_2. \tag{5.37}$$

The interest of the conditions in point (ii) is that they do not make use of the vector \bar{s} , which is unknown when the AL algorithm is trying to solve (5.1). These conditions (ii) are a first step in the design of a stopping criterion of the revised version of the AL algorithm, given in section 5.4.2. The next step is in proposition 5.19.

Lemma 5.14. *The following properties of $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ are equivalent:*

- (i) $\bar{y} - A\bar{x} = \bar{s}$ and $\bar{y} \in [l, u]$,
- (ii) $A^T(A\bar{x} - \bar{y}) = 0$ and $P_{[l,u]}(A\bar{x}) = \bar{y}$,

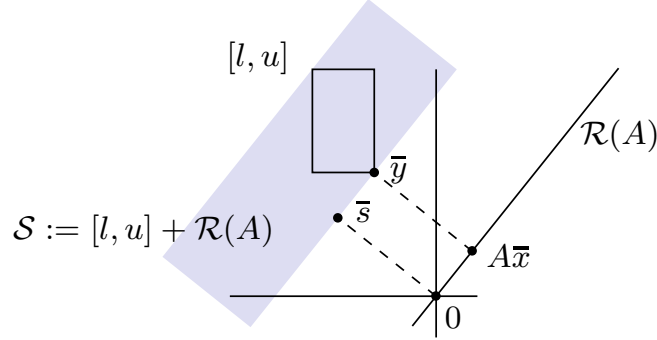


FIGURE 5.1 – Illustration of lemma 5.14

(iii) (\bar{x}, \bar{y}) is a solution to (5.37).

PROOF. [(i) \Rightarrow (ii)] Since $A^T \bar{s} = 0$ by (5.36), the first identity is a clear consequence of (i). Now, since \bar{s} is the projection of zero on $[l, u] + \mathcal{R}(A)$, there holds

$$\bar{s}^T (s - \bar{s}) \geq 0, \quad \forall s \in [l, u] + \mathcal{R}(A).$$

Choosing $s = y \in [l, u]$, substituting $\bar{s} = \bar{y} - A\bar{x}$, and using the identity $A^T \bar{s} = 0$ yield

$$(\bar{y} - A\bar{x})^T (y - \bar{y}) \geq 0, \quad \forall y \in [l, u],$$

which shows the second identity.

[(ii) \Rightarrow (iii)] Using the function $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ defined at $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ by $\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2$, the conditions in (ii) can also be written

$$\nabla_x \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \text{and} \quad \nabla_y \varphi(\bar{x}, \bar{y})^T (y - \bar{y}) \geq 0, \quad \forall y \in [l, u].$$

These are the optimality conditions of the convex problem (5.37). Hence (\bar{x}, \bar{y}) is a solution to that problem.

[(iii) \Rightarrow (i)] This is because problem (5.37) is equivalent to problem $\inf\{\|s\|_2 : y - Ax = s, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u]\} = \inf\{\|s\|_2 : s \in \mathcal{S}\}$, whose solution is \bar{s} . Hence (i). \square

5.2.4 The closest feasible problem

The *closest feasible problem* is a relaxation of the possibly infeasible problem (5.3) in which the equality constraint is forced to have its smallest value \bar{s} :

$$\begin{cases} \inf_{(x,y)} q(x) \\ y - Ax = \bar{s} \\ l \leq y \leq u. \end{cases} \quad (5.38)$$

That problem is therefore feasible. Of course, if the original problem (5.1) is feasible, $\bar{s} = 0$ and (5.38) is identical to (5.3). Problem (5.38) is the one that the AL algorithm will actually solve, when it is designed to solve (5.3). This section gives some properties of that problem.

Similarly to what we did with the unshifted problem (5.3), we introduce as Lagrangian of problem (5.38), the function $\tilde{\ell} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, whose value at $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ is obtained by dualizing the equality constraint

$$\tilde{\ell}(x, y, \lambda) := q(x) + \lambda^\top (Ax - y + \bar{s}).$$

As for the associated dual function, it reads

$$\tilde{\delta}(\lambda) := - \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \tilde{\ell}(x, y, \lambda) = \delta(\lambda) - \bar{s}^\top \lambda. \quad (5.39)$$

As a result

$$\partial \tilde{\delta}(\lambda) = \partial \delta(\lambda) - \bar{s}. \quad (5.40)$$

We then define the set of dual solutions to problem (5.38) as follows

$$\tilde{\mathcal{S}}_D := \{\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m : 0 \in \partial \tilde{\delta}(\bar{\lambda})\}. \quad (5.41)$$

Here are some other expressions of $\tilde{\mathcal{S}}_D$.

Lemma 5.15 (expressions of $\tilde{\mathcal{S}}_D$). *When assumption 5.7 holds, $\tilde{\mathcal{S}}_D$ is nonempty and also reads*

$$\tilde{\mathcal{S}}_D = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \bar{s} \in \partial \delta(\bar{\lambda})\} = \partial v(\bar{s}). \quad (5.42)$$

PROOF. The first equality in (5.42) comes from (5.40) and the second comes from proposition 5.10. Now, by (5.32), $\bar{s} \in \mathcal{S}$ implies the existence of some $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ such that $\bar{s} = \partial \delta(\bar{\lambda})$, so that $\tilde{\mathcal{S}}_D \neq \emptyset$. \square

The next proposition will be useful to identify some displacement decreasing the distance to $\tilde{\mathcal{S}}_D$. Recall that the Hadamard product $u \cdot v$ of two vectors u and $v \in \mathbb{R}^m$ is the vector of \mathbb{R}^m having its i th component defined by

$$(u \cdot v)_i = u_i v_i. \quad (5.43)$$

Proposition 5.16 (\bar{s} and $\tilde{\mathcal{S}}_D$). *Suppose that assumption 5.7 holds and let $\bar{\lambda} \in \tilde{\mathcal{S}}_D$. Then*

- (i) $\bar{s} \cdot \bar{\lambda} \leq 0$,
- (ii) if $\bar{s} \cdot (\bar{\lambda} + \alpha \bar{s}) \leq 0$ for some $\alpha \in \mathbb{R}$, then $\bar{\lambda} + \alpha \bar{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_D$,
- (iii) $-\bar{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_D^\infty$.

PROOF. [Preliminaries] By $\bar{s} \in \mathcal{S}$ and assumption 5.7, problem (5.38) has a solution, say (\bar{x}, \bar{y}) . By the assumption $\bar{\lambda} \in \tilde{\mathcal{S}}_D$ and (5.42), $\bar{s} \in \partial \delta(\bar{\lambda})$. By the implication (i) \Rightarrow (iii) of proposition 5.10, (\bar{x}, \bar{y}) minimizes the Lagrangian $\ell(\cdot, \cdot, \bar{\lambda})$ on $\mathbb{R}^n \times [l, u]$.

[(i)] Suppose that $\bar{s}_i > 0$ for some index i (the reasoning is similar when $\bar{s}_i < 0$).

- We first show, by contradiction, that $\bar{y}_i = l_i$. Since $\bar{s} = \arg \min\{\|s\| : s \in [l, u] + \mathcal{R}(A)\}$,

$$(y - Ax - \bar{s})^\top \bar{s} \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u]. \quad (5.44)$$

If $\bar{y}_i > l_i$, $\bar{y} - \varepsilon e^i = A\bar{x} + \bar{s} - \varepsilon e^i$ is in $[l, u]$ for some $\varepsilon > 0$. Taking $y = A\bar{x} + \bar{s} - \varepsilon e^i$ and $x = \bar{x}$ in (5.44) yields $-\varepsilon \bar{s}_i \geq 0$, a contradiction. Hence $\bar{y}_i = l_i$.

- Now since (\bar{x}, \bar{y}) minimizes the Lagrangian $\ell(\cdot, \cdot, \bar{\lambda})$ on $\mathbb{R}^n \times [l, u]$, $\bar{y}_i = l_i$ implies $\bar{\lambda}_i \leq 0$. We have shown that $\bar{s}_i \bar{\lambda}_i \leq 0$.

[(ii)] We have seen that (\bar{x}, \bar{y}) minimizes the Lagrangian $\ell(\cdot, \cdot, \bar{\lambda})$ on $\mathbb{R}^n \times [l, u]$. Suppose that $\alpha \in \mathbb{R}$ is such that $\bar{s} \cdot (\bar{\lambda} + \alpha \bar{s}) \leq 0$. The implication (iv) \Rightarrow (i) of proposition 5.10 tells us that to prove that $\bar{\lambda} + \alpha \bar{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_D$, which is equivalent to $\bar{s} \in \partial \delta(\bar{\lambda} + \alpha \bar{s})$ by (5.42), we only have to show that (\bar{x}, \bar{y}) minimizes

$$(x, y) \mapsto \ell(x, y, \bar{\lambda} + \alpha \bar{s}) = q(x) + (\bar{\lambda} + \alpha \bar{s})^\top (Ax - y)$$

5.2. PROBLEM STRUCTURE

on $\mathbb{R}^n \times [l, u]$. By (5.36), the minimization in x is not affected by the new term $\alpha\bar{s}$. As for the minimization in y_i (the minimization in y can be done component by component), we only consider the case when $\bar{s}_i > 0$ (the case $\bar{s}_i < 0$ is similar). By the proof of (i), we know that $\bar{y}_i = l_i$ in that case, so that it is enough to show that $(\bar{\lambda} + \alpha\bar{s})_i \leq 0$, which is indeed verified since $\bar{s} \cdot (\bar{\lambda} + \alpha\bar{s}) \leq 0$ by assumption.

[(iii)] Let $\alpha \geq 0$. By point (i), $\bar{s} \cdot (\bar{\lambda} - \alpha\bar{s}) \leq -\alpha(\bar{s} \cdot \bar{s}) \leq 0$. Therefore, by point (ii), $\bar{\lambda} - \alpha\bar{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_D$ for all $\alpha \geq 0$, meaning that $-\bar{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_D^\infty$. \square

The example below shows that, if $\tilde{\mathcal{S}}_D^\infty$ contains the half line $-\mathbb{R}_+\bar{s}$ (point (iii) of the previous proposition), it is not necessarily reduced to it.

Example 5.17 ($\tilde{\mathcal{S}}_D^\infty$ can be an orthant). For the trivial optimization problem with $n = 1$, $m = 2$, $g = 0$, $H = 0$, $A = 0$, $l = (-\infty, -\infty)$, and $u = (-1, -1)$, one finds $\bar{s} = u$ by the definition (5.10) of \bar{s} and $\tilde{\delta} = \mathcal{I}_{\mathbb{R}_+^2}$ by the definition (5.39) of $\tilde{\delta}$, so that $\tilde{\mathcal{S}}_D = \mathbb{R}_+^2 = \tilde{\mathcal{S}}_D^\infty$. \square

We recall that the prox operator is defined in (5.25).

Proposition 5.18 (distance to $\tilde{\mathcal{S}}_D$). *Suppose that assumption 5.7 holds and let $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Then the following properties hold:*

- (i) $\text{dist}(\lambda - \alpha\bar{s}, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq \text{dist}(\lambda, \tilde{\mathcal{S}}_D)$, when $\alpha \geq 0$,
- (ii) $\text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda) = \text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda - r\bar{s})$,
- (iii) $\text{dist}(\text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda), \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq \text{dist}(\lambda, \tilde{\mathcal{S}}_D)$.

PROOF. [(i)] Let $\tilde{\lambda}$ be the projection of λ on the nonempty closed convex set $\tilde{\mathcal{S}}_D$. Since $\tilde{\lambda} - \alpha\bar{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_D$ by point (iii) of proposition 5.16, it follows that

$$\text{dist}(\lambda - \alpha\bar{s}, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq \|(\lambda - \alpha\bar{s}) - (\tilde{\lambda} - \alpha\bar{s})\| = \|\lambda - \tilde{\lambda}\| = \text{dist}(\lambda, \tilde{\mathcal{S}}_D).$$

[(ii)] Let $\mu := \text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda - r\bar{s})$. Then, $0 \in \partial\tilde{\delta}(\mu) + \frac{1}{r}[\mu - (\lambda - r\bar{s})]$, so that there is some $\tilde{s} \in \partial\tilde{\delta}(\mu)$ such that

$$\mu = \lambda - r(\tilde{s} + \bar{s}).$$

Now $\tilde{s} + \bar{s} \in \partial\tilde{\delta}(\mu) + \bar{s} = \partial\delta(\mu)$ by (5.40), so that $\mu := \text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda)$.

[(iii)] By (ii),

$$\text{dist}\left(\text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda), \tilde{\mathcal{S}}_D\right) = \text{dist}\left(\text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda - r\bar{s}), \tilde{\mathcal{S}}_D\right). \quad (5.45)$$

Now, since $\tilde{\mathcal{S}}_D = \arg \min \tilde{\delta}$,

$$\text{dist}\left(\text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda - r\bar{s}), \tilde{\mathcal{S}}_D\right) \leq \text{dist}(\lambda - r\bar{s}, \tilde{\mathcal{S}}_D). \quad (5.46)$$

Combining (5.45), (5.46), and (i) yields the result. \square

Point (ii) tells us that the proximal step from λ to $\lambda_+ := \text{prox}_{\tilde{\delta}, r}(\lambda)$ can be decomposed as the sum of the proximal step on the constant operator $\lambda \rightarrow -\bar{s}$, from λ to $\lambda - r\bar{s}$, and the proximal step on $\partial\tilde{\delta}$, from $\lambda - r\bar{s}$ to λ_+ . Of course point (iii) of proposition 5.18 still holds if $\tilde{\mathcal{S}}_D$ is replaced by \mathcal{S}_D , and results then from a standard property of proximality, which was actually used to get (5.46) in the proof of point (iii).

The next characterization of a solution to problem (5.38) is used after its proof to discuss the design of a new stopping criterion of the revised version of the AL algorithm, given in section 5.4.2. The augmented Lagrangian used in (5.47) is not the one of problem (5.38) but the one used in the AL algorithm, which is associated with problem (5.3).

Proposition 5.19 (optimality conditions of the closest feasible problem). *Suppose that assumption 5.7 holds. Let $r \geq 0$ and let ℓ_r be the augmented Lagrangian (5.23). Then $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times [l, u]$ is a solution to (5.38) if and only if there is some $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ such that*

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \arg \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [l,u]} \ell_r(x, y, \bar{\lambda}), \quad (5.47)$$

$$A^\top(A\bar{x} - \bar{y}) = 0, \quad (5.48)$$

$$P_{[l,u]}(A\bar{x}) = \bar{y}. \quad (5.49)$$

PROOF. [Necessity] Since a solution (\bar{x}, \bar{y}) to (5.38) satisfies the constraints of that problem, (5.48) and (5.49) hold by the implication (i) \Rightarrow (ii) of lemma 5.14. Now, by (5.32), $\bar{s} \in \mathcal{S}$ implies the existence of some $\bar{\lambda}$ such that $\bar{s} = \partial\delta(\bar{\lambda})$. By the implication (i) \Rightarrow (iii) of proposition 5.10, (\bar{x}, \bar{y}) minimizes

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u] \mapsto q(x) + \bar{\lambda}^\top(Ax - y + \bar{s}),$$

which leads to

$$q(\bar{x}) + \bar{\lambda}^\top(A\bar{x} - \bar{y}) \leq q(x) + \bar{\lambda}^\top(Ax - y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u]. \quad (5.50)$$

Now, $y - Ax \in \mathcal{S} := [l, u] + \mathcal{R}(A)$, so that $\|A\bar{x} - \bar{y}\| = \|\bar{s}\| \leq \|Ax - y\|$ by the minimum norm property of \bar{s} in (5.10). Using (5.50), we get for all $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u]$:

$$q(\bar{x}) + \bar{\lambda}^\top(A\bar{x} - \bar{y}) + \frac{r}{2}\|A\bar{x} - \bar{y}\|^2 \leq q(x) + \bar{\lambda}^\top(Ax - y) + \frac{r}{2}\|Ax - y\|^2.$$

This is (5.47).

[Sufficiency] By the implication (ii) \Rightarrow (i) of lemma 5.14, (5.48) and (5.49) show that (\bar{x}, \bar{y}) satisfies the constraints of (5.38). Now let (x, y) satisfy the constraints of (5.38). Then (5.47) and $A\bar{x} - \bar{y} = Ax - y = -\bar{s}$ yield

$$q(\bar{x}) - \bar{\lambda}^\top\bar{s} + \frac{r}{2}\|\bar{s}\|^2 \leq q(x) - \bar{\lambda}^\top\bar{s} + \frac{r}{2}\|\bar{s}\|^2.$$

Hence $q(\bar{x}) \leq q(x)$, implying that $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ is a solution to (5.38). \square

Since at each iteration of the AL algorithm, in step 1 actually, the condition (5.47) is satisfied with λ_k in place of $\bar{\lambda}$, it makes sense to stop the AL iterations when conditions (5.48) and (5.49) are approximately satisfied, namely when

$$A^\top(Ax_{k+1} - y_{k+1}) \simeq 0 \quad \text{and} \quad P_{[l,u]}(Ax_{k+1}) - y_{k+1} \simeq 0. \quad (5.51)$$

This observation motivates the fact that we take these last two conditions as stopping criterion in step 3 of the revised version of the AL algorithm in section 5.4.2. Proposition 5.23 below shows by its points (ii) and (iii) that they are eventually satisfied by the AL algorithm.

5.3 Global linear convergence

With the results presented in the previous section, one can now start the analysis of the convergence of the AL algorithm when the considered QP may be infeasible. The notion of convergence will, of course, have to be redefined, since then the QP may have neither primal nor dual solution. Nevertheless, as we shall see in section 5.3.1, what the AL algorithm is able to realize, when assumption 5.7 holds, is to find a solution to the closest feasible problem (5.38) at a global linear speed.

Let us denote by $\{(x_k, y_k)\}$ and $\{\lambda_k\}$ the primal and dual sequences generated by the AL algorithm.

5.3.1 Convergence to a solution to the closest feasible problem

The proof given by Spingarn [Spingarn, 1987, lemma 1] of the convergence of the constraint values $s_k := y_k - Ax_k$ to the smallest feasible shift \bar{s} is remarkably simple; it assumes however that $r_k \equiv 1$. For completeness, we recall this proof in point (iii) of the next proposition to show, with the results obtained previously, that varying r_k does not prevent the convergence.

Proposition 5.20 (convergence without error bound). *Suppose that assumption 5.7 holds. Then*

- (i) for all $k \geq 1$, $\|s_{k+1}\| \leq \|s_k\|$,
- (ii) the sequence $\{\text{dist}(\lambda_k, \tilde{\mathcal{S}}_D)\}$ is nonincreasing,
- (iii) if r_k is bounded away from zero, then $s_k := y_k - Ax_k \rightarrow \bar{s}$.

PROOF. [(i)] This classical inequality of the proximal algorithm can be obtained by writing

$$\|s_k\|^2 = \|(s_k - s_{k+1}) + s_{k+1}\|^2 = \|s_k - s_{k+1}\|^2 + 2\langle s_k - s_{k+1}, s_{k+1} \rangle + \|s_{k+1}\|^2.$$

Observe now that the cross term in the right hand side is nonnegative by the monotonicity of $\partial\delta(\cdot)$:

$$\langle s_k - s_{k+1}, s_{k+1} \rangle = \frac{1}{r_k} \langle s_k - s_{k+1}, \lambda_k - \lambda_{k+1} \rangle \geq 0,$$

since, by (5.26), $s_k \in \partial\delta(\lambda_k)$ and $s_{k+1} \in \partial\delta(\lambda_{k+1})$. Point (i) follows.

[(ii)] Recall that $\lambda_{k+1} = \text{prox}_{\delta, r_k}(\lambda_k)$ (lemma 5.5) and apply the point (iii) of proposition 5.18.

[(iii)] The idea used by Spingarn is to compare the sequence $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ with a sequence $\{\mu_k\}_{k \geq 0}$ in $\tilde{\mathcal{S}}_D \neq \emptyset$ (lemma 5.15) constructed as follows:

$$\mu_0 \in \tilde{\mathcal{S}}_D \quad \text{and} \quad \mu_{k+1} = \mu_k - r_k \bar{s} \quad (\text{for } k \geq 0).$$

By point (iii) of proposition 5.16, $\{\mu_k\} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_D$. Since $\lambda_{k+1} = \lambda_k - r_k s_{k+1}$ by (5.6), there holds

$$\lambda_k - \mu_k = \lambda_{k+1} - \mu_{k+1} + r_k (s_{k+1} - \bar{s}).$$

Now $s_{k+1} \in \partial\delta(\lambda_{k+1})$, $\bar{s} \in \partial\delta(\mu_{k+1})$, and the monotonicity of $\partial\delta$ imply that $\langle s_{k+1} - \bar{s}, \lambda_{k+1} - \mu_{k+1} \rangle \geq 0$. Therefore, taking the squared norm of both sides of the identity above and neglecting the resulting cross term in the right hand side yield

$$\|\lambda_k - \mu_k\|^2 \geq \|\lambda_{k+1} - \mu_{k+1}\|^2 + r_k^2 \|s_{k+1} - \bar{s}\|^2.$$

Since the last term is nonnegative, the inequality shows that the nonnegative sequence $\{\|\lambda_k - \mu_k\|\}$ is nonincreasing, hence converges. Therefore the same inequality implies that $r_k \|s_{k+1} - \bar{s}\|$ converges to zero. Since r_k is bounded away from zero, $s_k \rightarrow \bar{s}$. \square

We now start presenting more precise convergence results that depend on the error bound associated with the dual solution set $\tilde{\mathcal{S}}_D$, derived from the one presented in lemma 5.13.

Proposition 5.21 ($\text{dist}(\lambda_k, \tilde{\mathcal{S}}_D)$). *Suppose that assumption 5.7 holds and let $\{\lambda_k\}$ be the sequence generated by the AL algorithm. Then for any $\beta > 0$, there exists an $L > 0$, such that $\text{dist}(\lambda_0, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq \beta$ implies that*

$$\forall k \geq 1 : \quad \text{dist}(\lambda_k, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq L \|s_k - \bar{s}\|. \quad (5.52)$$

PROOF. Since, by (5.29), the closest feasible problem (5.38) has a solution, the quasi-global error bound of lemma 5.13 applied to that problem reads

$$\begin{aligned} &\text{for any bounded set } \tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathbb{R}^m, \text{ there is an } L > 0, \text{ such that} \\ &\forall \lambda \in \tilde{\mathcal{S}}_D + \tilde{\mathcal{B}}, \quad \forall \tilde{s} \in \partial\tilde{\delta}(\lambda) : \quad \text{dist}(\lambda, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq L \|\tilde{s}\|. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Let $\beta > 0$ and define $\mathcal{B} := \beta B$, where B denotes the closed unit ball. Let $L > 0$ be the constant given by (5.53). Assume now that $\text{dist}(\lambda_0, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq \beta$. Then point (i) implies that $\text{dist}(\lambda_k, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq \beta$ for all $k \geq 0$, which can also be written $\lambda_k \in \tilde{\mathcal{S}}_D + \mathcal{B}$. Assume now that $k \geq 1$. By (5.26) and (5.40), $s_k - \bar{s} \in \partial\tilde{\delta}(\lambda_k)$. Therefore, one can use $\lambda = \lambda_k$ and $\tilde{s} = s_k - \bar{s}$ in (5.53), which leads to (5.52). \square

Our main result is the following.

Theorem 5.22 (global linear convergence). *Suppose that assumption 5.7 holds and let $\tilde{\mathcal{S}}_D$ be set of dual solutions to the closest feasible problem (5.38). Then, for any $\beta > 0$, there exists an $L > 0$, such that $\text{dist}(\lambda_0, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq \beta$ implies that the primal sequence $\{(x_k, y_k)\}$ generated by the AL algorithm satisfies*

$$\forall k \geq 1 : \quad \|s_{k+1} - \bar{s}\| \leq \frac{L}{r_k} \|s_k - \bar{s}\|, \quad (5.54)$$

$$\forall k \geq 0 : \quad \text{dist}(\lambda_{k+1}, \tilde{\mathcal{S}}_D) \leq \min\left(\frac{L}{r_k}, 1\right) \text{dist}(\lambda_k, \tilde{\mathcal{S}}_D), \quad (5.55)$$

where $s_k := y_k - Ax_k$ is the equality constraint value of problem (5.3) and \bar{s} is the minimum feasible shift defined by (5.10).

PROOF. Suppose that $k \geq 0$ and consider an arbitrary $\tilde{\lambda} \in \tilde{\mathcal{S}}_D := \partial\tilde{\delta}^{-1}(0)$, see (5.41). First $0 \in \partial\tilde{\delta}(\tilde{\lambda})$, clearly. Next $s_{k+1} - \bar{s} \in \partial\tilde{\delta}(\lambda_{k+1}) - \bar{s} = \partial\tilde{\delta}(\lambda_{k+1})$, by (5.26) and (5.40). Then, the monotonicity of the multifunction $\partial\tilde{\delta}$ implies that

$$(s_{k+1} - \bar{s})^\top (\lambda_{k+1} - \tilde{\lambda}) \geq 0. \quad (5.56)$$

On the other hand, subtracting $\tilde{\lambda} + r_k \bar{s}$ from both sides of the iteration identity (5.15) and using $\tilde{\lambda}_k := \lambda_k - r_k \bar{s}$ yield

$$\lambda_{k+1} - \tilde{\lambda} + r_k (s_{k+1} - \bar{s}) = \tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}.$$

Taking norms, using (5.56) and $r_k > 0$, and neglecting $\|\lambda_{k+1} - \tilde{\lambda}\|$ lead to

$$\|s_{k+1} - \bar{s}\| \leq \frac{1}{r_k} \|\tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}\|.$$

Since $\tilde{\lambda}$ is arbitrary in $\tilde{\mathcal{S}}_D$:

$$\|s_{k+1} - \bar{s}\| \leq \frac{1}{r_k} \text{dist}(\tilde{\lambda}_k, \tilde{\mathcal{S}}_D).$$

Now the expression of $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - r_k \bar{s}$ and point (i) of proposition 5.18 yield

$$\forall k \geq 0 : \quad \|s_{k+1} - \bar{s}\| \leq \frac{1}{r_k} \text{dist}(\lambda_k, \tilde{\mathcal{S}}_D). \quad (5.57)$$

Assuming that $k \geq 1$ and using (5.52) in (5.57) gives (5.54). On the other hand, starting with (5.52) and using (5.57) lead to (5.55) with the factor L/r_k . For getting the unit factor in (5.55), just use point (i) of proposition 5.21. \square

We illustrate theorems 5.22 in figure 5.2. This one represents the maximal quotient

$$\rho = \max_{k \geq 0} \frac{\|s_{k+1} - \bar{s}\|}{\|s_k - \bar{s}\|}$$

contingent on different values of parameter r_k .

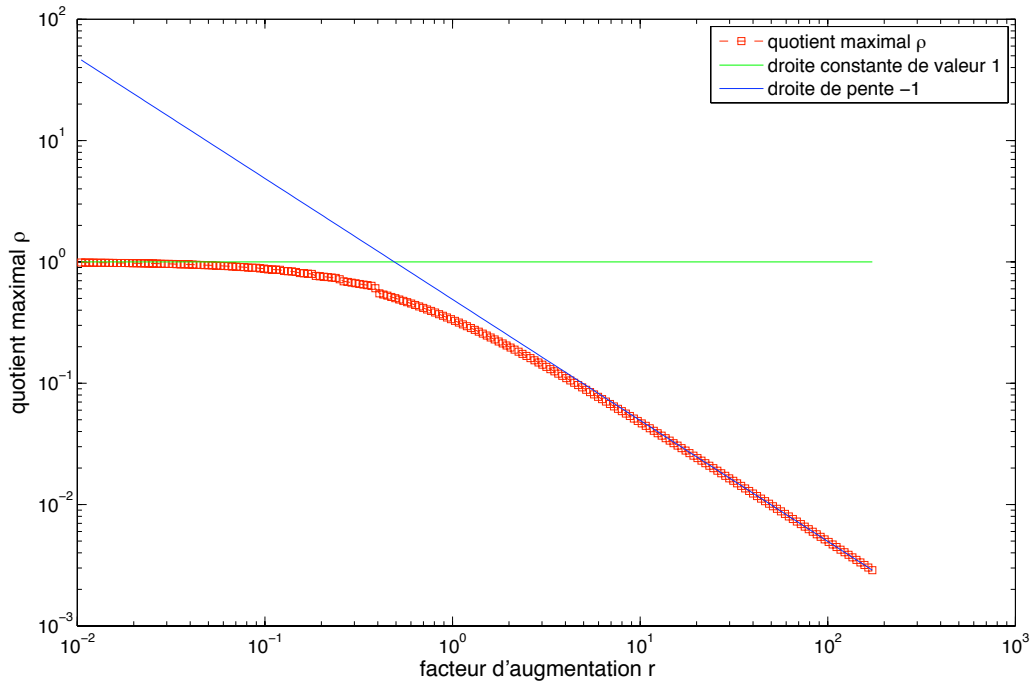


FIGURE 5.2 – Illustration of theorem 5.22

5.4 The revised AL algorithm

5.4.1 The stopping criterion revisited

For an equality constrained problem, it is reasonable to stop the iterations as soon as $A^T(Ax_k - b)$ is small enough. Indeed, suppose that $A^T(A\bar{x} - b) = 0$, then there are two cases.

- Either $A\bar{x} = b$, in which case, the problem is feasible and the feasible point \bar{x} is a solution to the original problem.
- Or $A\bar{x} \neq b$, in which case, the problem is infeasible. Indeed, the condition $A^T(A\bar{x} - b) = 0$ is the optimality condition of the least square problem $\min_x \|Ax - b\|^2$, so if $b \in \mathcal{R}(A)$ (that is if the problem is feasible), the optimal value of this least square problem is 0 and $A\bar{x} = b$.

We can now give an extension of the Fortin-Glowinski-LeTallec result [Fortin et Glowinski, 1982, Glowinski et Le Tallec, 1989] to problem (5.1), with inequality constraints. Since point (iii) of proposition 5.23, when $s_k = y_k - Ax_k$ is a subgradient of the dual function generated by the AL algorithm, if $P_{[l,u]}(Ax_k) - y_k$ may not vanish, it converges nevertheless to zero.

For inequality constrained problems, testing whether $A^T(Ax_k - y_k)$ is small enough is not satisfactory, since one may have $A^T(A\bar{x} - \bar{y}) = 0$ for a minimizer of $\ell_r(x, y, \lambda)$ on $\mathbb{R}^n \times [l, u]$ although (\bar{x}, \bar{y}) is not a solution to the original problem. On the other hand, the following result holds.

Proposition 5.23. *If (5.29) holds, then the AL algorithm generates a sequence $\{(x_k, y_k)\}$ that satisfies*

- (i) $\|Ax_k - y_k\| \rightarrow \inf\{\|Ax - y\| : x \in \mathbb{R}^n, y \in [l, u]\},$
- (ii) $A^T(Ax_k - y_k) \rightarrow 0,$
- (iii) $P_{[l,u]}(Ax_k) - y_k \rightarrow 0.$

PROOF. [(i)] Note that $(\lambda_{k+1} - \lambda_k)/r_k = Ax_{k+1} - y_{k+1}$ and that \bar{s} is defined by (5.10). Then point (iii) of proposition 5.20 implies that $\|Ax_k - y_k\|$ converges to $\|\bar{s}\| = \inf\{\|Ax - y\| : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times [l, u]\}$.

[(ii)] On the other hand, $\bar{s} \in \mathcal{N}(A^\top)$ implies that $A^\top(Ax_k - y_k) \rightarrow 0$.

[(iii)] Let us denote the projection of Ax_k on $[l, u]$ by

$$\tilde{y}_k := P_{[l, u]}(Ax_k),$$

which is characterized by

$$(\tilde{y}_k - Ax_k)^\top(y - \tilde{y}_k) \geq 0, \quad \forall y \in [l, u]. \quad (5.58)$$

We want to show that $\tilde{y}_k - y_k \rightarrow 0$. Let us introduce the vectors

$$v_k := y_k - Ax_k - \bar{s},$$

which converge to zero by point (i). Since \bar{s} is the projection of zero on $\mathcal{S} = [l, u] + \mathcal{R}(A)$, there holds

$$\bar{s}^\top(s - \bar{s}) \geq 0, \quad \forall s \in [l, u] + \mathcal{R}(A).$$

By choosing $s = y \in [l, u]$, by using the definition of v_k and the identity $A^\top \bar{s} = 0$ by (5.36), we obtain successively

$$\begin{aligned} \bar{s}^\top(y - y_k + v_k) &\geq 0, & \forall y \in [l, u]. \\ (y_k - Ax_k - v_k)^\top(y - y_k + v_k) &\geq 0, & \forall y \in [l, u]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Now adding (5.58) with $y = y_k \in [l, u]$ and (5.59) with $y = \tilde{y}_k \in [l, u]$ yields

$$\|\tilde{y}_k - y_k\|^2 \leq v_k^\top \bar{s} - v_k^\top (\tilde{y}_k - y_k) \leq \|v_k\| \|\tilde{y}_k - y_k\| + \|v_k\| \|\bar{s}\|.$$

Now $v_k \rightarrow 0$ implies that $\tilde{y}_k - y_k \rightarrow 0$ as desired. \square

Unfortunately, the last result about global linear convergence is insufficient to build a satisfactory stopping criterion. The numerical use of such a result indeed requires to know the value of \bar{s} , which is itself a solution to a quadratic optimization problem. Next lemma allows to compensate for this additional resolution. In fact, it shows that the global linear convergence of a sequence is equivalent to the global linear convergence to zero of the difference of this sequence. Furthermore, the relation between the two rates of convergence is known.

Lemma 5.24. *Let $\{s_k\}$ and $\{s'_k\}$ be two sequences in a linear space \mathbb{E} related by $s'_k := s_{k+1} - s_k$.*

1) *If the sequence $\{s_k\}$ satisfies for some $\bar{s} \in \mathbb{E}$, some $\tau \in [0, 1[$, and all $k \geq k_1$:*

$$\|s_{k+1} - \bar{s}\| \leq \tau \|s_k - \bar{s}\|,$$

then the sequence $\{s'_k\}$ verifies for all $k \geq k_1$:

$$\|s'_{k+1}\| \leq \frac{(1 + \tau)\tau}{1 - \tau} \|s'_k\|. \quad (5.60)$$

2) *Conversely, if the sequence $\{s'_k\}$ verifies for some constant $\tau' \in [0, 1[$ and all $k \geq k_1$:*

$$\|s'_{k+1}\| \leq \tau' \|s'_k\|,$$

then the sequence $\{s_k\}$ converges to some \bar{s} and satisfies for all $k \geq k_1$:

$$\|s_{k+1} - \bar{s}\| \leq \frac{\tau'}{1 - 2\tau'} \|s_k - \bar{s}\|. \quad (5.61)$$

5.4. THE REVISED AL ALGORITHM

PROOF. 1) Let $k \geq k_1$. Then

$$\begin{aligned} \|s'_k\| &\leq \|s_{k+1} - \bar{s}\| + \|s_k - \bar{s}\| \leq (1 + \tau)\|s_k - \bar{s}\| \\ \|s'_k\| &\geq \|s_k - \bar{s}\| - \|s_{k+1} - \bar{s}\| \geq (1 - \tau)\|s_k - \bar{s}\|. \end{aligned}$$

Hence

$$\|s'_{k+1}\| \leq (1 + \tau)\|s_{k+1} - \bar{s}\| \leq (1 + \tau)\tau\|s_k - \bar{s}\| \leq \frac{(1 + \tau)\tau}{1 - \tau}\|s'_k\|.$$

2) Observe first that the sequence $\{s_k\}$ is a Cauchy sequence: for $l > k \geq k_1$ there holds

$$\|s_l - s_k\| \leq \|s'_{l-1}\| + \cdots + \|s'_k\| \leq \sum_{i=0}^{l-k-1} (\tau')^i \|s'_k\| \leq \frac{1}{1 - \tau'} \|s'_k\|,$$

which tends to zero when $k \rightarrow \infty$. Therefore $\{s_k\}$ converges, say to some \bar{s} . Taking $k + 1$ instead of k in the previous estimate and letting $l \rightarrow \infty$ yield for $k \geq k_1$:

$$\|s_{k+1} - \bar{s}\| \leq \frac{1}{1 - \tau'} \|s'_{k+1}\| \leq \frac{\tau'}{1 - \tau'} \|s'_k\| \leq \frac{\tau'}{1 - \tau'} (\|s_{k+1} - \bar{s}\| + \|s_k - \bar{s}\|).$$

The linear convergence of $\{s_k\}$ in (5.61) follows. \square

From that lemma, we see that the sequence $\{s'_k\}$ also converges linearly, as soon as $(1 + \tau)\tau \leq 1 - \tau$ or $\tau \leq \sqrt{2} - 1 \simeq 0.4$. Of course

$$\tau' := \frac{(1 + \tau)\tau}{1 - \tau} \geq \tau,$$

but when τ is small, τ' and τ are very close to each other. For example, when $\tau = 0.1$, $\tau' \simeq 0.12$, while when $\tau = 0.01$, $\tau' \simeq 0.01$. Therefore when the required rate of convergence τ is small enough, the one actually realized can be observed directly on τ' . Figure 5.3 represents the linear rates of

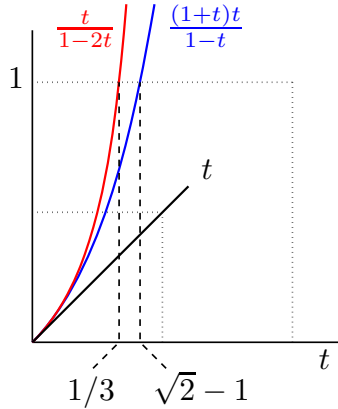


FIGURE 5.3 – Rates of linear convergence appearing in (5.60) and (5.61)

convergence appearing in (5.60) and (5.61).

Finally, the observation of the behavior of the sequence $\{s'_k\}$ is sufficient to define a stopping criterion and to compute parameters r_k such as the convergence be as fast as desired.

5.4.2 Revised augmented Lagrangian algorithm

We conclude this section by incorporating in the AL algorithm of section 5.1 the modifications suggested by the analysis of this paper. The algorithm is described as though computation were done in exact arithmetic.

IMPROVED AL ALGORITHM to solve (5.1)

Initialization: choose $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ and $r_0 > 0$.

Repeat for $k = 0, 1, 2, \dots$

1. If the feasible AL subproblem (5.13) has no solution, exit with a direction $d \in \mathbb{R}^n$ verifying (5.14). Otherwise, denote a solution to (5.13) by (x_{k+1}, y_{k+1}) .
2. Update the multiplier by (5.15).
3. Stop if

$$P_{[l,u]}(Ax_{k+1}) = y_{k+1} \quad \text{and} \quad A^\top(Ax_{k+1} - y_{k+1}) = 0.$$

4. Choose a new augmentation parameter: $r_{k+1} > 0$.
-

We have used in step 3 the new stopping criterion discussed around (5.51).

5.5 Perspectives

It would be interesting to know whether the global linear convergence presented in this paper can be extended to a (possibly infeasible) convex quadratic problem defined on a Euclidean space \mathbb{E} (with a scalar product denoted by $\langle \cdot, \cdot \rangle$) and that reads

$$\begin{cases} \inf_x \langle g, x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Hx \rangle \\ Ax \in C \\ x \in X, \end{cases} \quad (5.62)$$

where $g \in \mathbb{E}$, H is a linear symmetric positive definite operator on \mathbb{E} , A is a linear operator from \mathbb{E} to some linear space \mathbb{F} , while X and C are convex sets in \mathbb{E} and \mathbb{F} respectively. The experience acquired in [Delbos et Gilbert, 2005] and in this paper suggests that the polyhedrality of the sets X and C is probably sufficient to get the quasi-global error bound of lemma 5.13, which has been important so far to get the global linear convergence result, but other assumptions on X and C might also yield a similar error bound. The generalization (5.62) of (5.1) is useful, in particular, because it can model by $x \in X$ a trust region constraint [Conn et col., 2000], which is not present in (5.1) as a constraint satisfied at each iteration of the AL algorithm, even when the constraints are incompatible. Such a constraint may occur in a trust region approach for solving a nonlinear optimization problem or may be used to prevent the solution to (5.1) from being discontinuous with respect to the problem data [Burke et Han, 1989, Burke, 1989, Burke, 1992]. Many algorithms have indeed been proposed to find a solution to some relaxed version of (5.62) when the set $\{x \in \mathbb{E} : Ax \in C, x \in X\}$ is empty (see [Powell, 1978, Vardi, 1985, Byrd et col., 1987, Byrd, 1987, Omojokun, 1991, Powell et Yuan, 1991] to mention a few), while to our knowledge the use of the AL algorithm has not been investigated.

Another computationally important question is to know whether the linear convergence result still holds when the AL subproblems are solved inexactly. Contributions along this line include the following [Solodov et Svaiter, 1999a, Solodov et Svaiter, 1999b, Solodov et Svaiter, 2000, Eckstein et Silva, 2010b, Eckstein et Silva, 2010a] and the references thereof.

The case of the Lagrangian relaxation algorithm [Hiriart-Urruty et Lemaréchal, 1993, chapters XIV-XV] probably deserves more investigations. Indeed, it is shown in [Dean et Glowinski, 2006,

theorem 4.1], that for the minimization of a strictly convex quadratic function subject to linear equality constraints, the Lagrangian relaxation algorithm, with sufficiently small step-sizes in the dual space, generates primal iterates that converge to the (unique) solution to the closest feasible problem. We are not aware of an extension of this result to convex problems with inequality constraints.

Acknowledgment

The work has been partially financed by the contract CIFRE n^o 635/2008 of the ANRT (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie, France). We would like to thank Arnaud Lenoir for discussions on the proximal algorithm, in particular for having drawn our attention on the contributions by Bruck and Reich [Bruck et Reich, 1977, Reich, 1977] and Spingarn [Spingarn, 1987], which helped us to make progress on the subject even though these results do not intervene in our developments (Spingarn's technique for proving $s_k \rightarrow \bar{s}$ is however mentioned in proposition 5.20, for completeness).

Troisième partie

L'algorithme du recouvrement progressif

Chapitre 6

Présentation de l'algorithme du recouvrement progressif

Ce chapitre introduit l'algorithme du recouvrement progressif, que nous avons étudié et appliqué à un problème de gestion de production d'électricité (la description du modèle et les résultats numériques sont présentés dans la partie [IV](#) de ce manuscrit). L'algorithme de recouvrement progressif - ou du *progressive hedging* - est une méthode de résolution de problèmes stochastiques formulés sur arbres de scénarios. L'article [[Rockafellar et Wets, 1991](#)] en est à l'origine. La justification du choix de la traduction du nom de l'algorithme est présentée au paragraphe [6.3.1](#).

Dans ce chapitre, nous exposons l'algorithme dans sa vision « intuitive » et dans son interprétation proximale, les résultats connus de convergence qui y sont rattachés, ainsi que les diverses expérimentations numériques pratiquées avec les propositions d'améliorations heuristiques associées.

6.1 Description

6.1.1 Circonstances d'application

Il est fréquent - notamment dans l'industrie - que l'on souhaite commander un système dont une partie des paramètres sont sujets à un degré notoire d'incertitude. Une description probabiliste de tels paramètres s'avère alors nécessaire, ce qui conduit à travailler sur des modèles stochastiques. Cependant, en fonction du type de problèmes considérés, les modèles stochastiques peuvent se révéler trop complexes pour en permettre la résolution.

Une approche courante pour simplifier - puis résoudre - ces problèmes est l'utilisation de scénarios, qui consistent en une discrétisation de l'ensemble des réalisations possibles des aléas. Ces scénarios peuvent ensuite être agrégés sous forme d'arbre ; ils représentent ainsi l'ensemble des futurs envisageables, chacun de leurs nœuds étant associé à un état du système à un instant d'un de ces éventuels futurs.

Remarque : Cela suppose que l'information soit croissante dans le temps et qu'elle ne puisse jamais être perdue.

6.1.2 Une décomposition par scénarios

Dans le cadre de la résolution de problèmes de grande taille (comme c'est le cas du problème de gestion à moyen-terme de la production d'électricité thermique, présenté plus précisément dans la partie [IV](#)), une méthode d'approche courante est de décomposer ces problèmes en plusieurs sous-problèmes de taille réduite. L'avantage d'une telle manœuvre est alors de résoudre des problèmes dont la dimension est significativement plus petite (mais dont il faudra éventuellement résoudre

plusieurs versions successives, déterminées par une technique de coordination). Il existe plusieurs stratégies de décomposition ; par exemple, les sous-problèmes peuvent chacun contenir les variables correspondant à une entité physique (c'est le cas de la méthode de décomposition par les prix), ou bien celles se rapportant à un même pas de temps.

La méthode du recouvrement progressif repose sur une décomposition du problème scénario par scénario, après relaxation de la contrainte dite « de non-anticipativité », qui est à l'origine du couplage des scénarios sur l'arbre (que nous définissons plus précisément au paragraphe 6.2.2). La contrainte relaxée est compensée par l'ajout d'un terme quadratique la pénalisant au critère à minimiser ; pour chaque scénario, on obtient un problème perturbé correspondant à un lagrangien augmenté « local ». *Remarque : Lors de l'application de l'algorithme du recouvrement progressif à un problème, on effectue une hypothèse sous-jacente, selon laquelle il est possible de résoudre les sous-problèmes associés aux différents scénarios.*

6.2 Cadre mathématique

6.2.1 Notations générales

On se place dans le cadre d'un horizon temporel divisé en T pas de temps $t \in \{1, \dots, T\}$. Soit \mathcal{S} l'ensemble des scénarios envisagés, et $N_{\mathcal{S}}$ le cardinal de \mathcal{S} . À chaque scénario $s \in \mathcal{S}$ est associé un poids p_s qui reflète son importance relative dans l'environnement incertain, c'est-à-dire sa probabilité d'occurrence ; ces poids vérifient :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad p_s > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s = 1.$$

Pour chaque scénario $s \in \mathcal{S}$, on considère un problème sous la forme suivante (6.1).

$$\inf_{x_s \in C_s} f_s(x_s), \tag{6.1}$$

où C_s est un ensemble de \mathbb{R}^{mT} ¹ et où f_s est une application de \mathbb{R}^{mT} à valeurs réelles.

On note $x = (x_1, \dots, x_T)$ un vecteur de \mathbb{R}^{mT} , où les x_t sont des vecteurs de \mathbb{R}^m . Le vecteur des stratégies à adopter si le scénario $s \in \mathcal{S}$ survient est alors noté $X(s) = (X_1(s), \dots, X_T(s))$, où une stratégie est définie de la manière suivante.

Définition 6.1. On qualifie de *stratégie* une application qui à un scénario $s \in \mathcal{S}$ fait correspondre un élément de \mathbb{R}^{mT} . On définit l'ensemble des stratégies :

$$\mathcal{E} = \{\text{stratégies } X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{mT}\}.$$

Remarque : Puisqu'il y a $N_{\mathcal{S}}$ scénarios, on peut identifier \mathcal{E} et $\mathbb{R}^{mTN_{\mathcal{S}}}$.

6.2.2 La contrainte de non-anticipativité

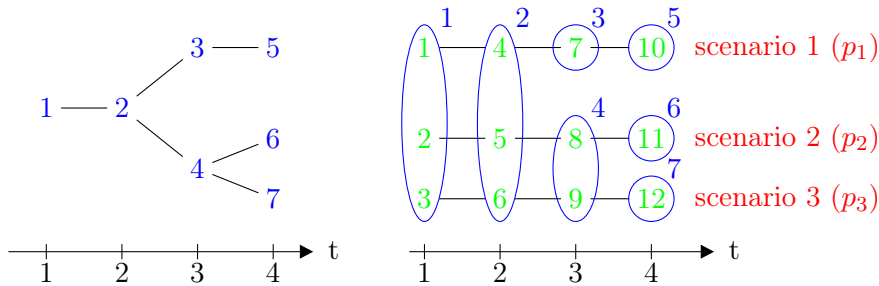
6.2.2.1 Justification

Si l'on considère des problèmes sur des scénarios, indépendants les uns des autres, ils sont chacun « anticipatifs », puisqu'ils ont un unique futur possible (avec une seule valeur pour les différents aléas). À l'inverse, si l'on suppose qu'un arbre (par exemple celui de la figure 6.1) constitue une approximation discrète de l'ensemble de tous les futurs possibles, les scénarios de l'arbre, qui sont liés les uns aux autres par leur appartenance à des branches identiques, forment une structure qui

1. C_s peut par exemple contenir les contraintes physiques du problème.

n'est pas anticipative. En effet, en chaque nœud, il peut y avoir plusieurs futurs possibles. Ainsi, lorsqu'on résout un problème sur un arbre, en chaque nœud la solution obtenue prend en compte l'ensemble de toutes les réalisations possibles du futur.

FIGURE 6.1 – Illustration de la contrainte de non-anticipativité



Remarque : La motivation pour obtenir une solution non anticipative se justifie par une volonté de disposer d'une stratégie qui soit la meilleure possible dans les situations ordinaires, mais qui prenne en compte les éventuelles situations difficiles². Une telle « solution barycentrique » est en quelque sorte un compromis qui couvre l'incertitude.

6.2.2.2 Expression

La non-anticipativité reflète le fait que, si l'on se trouve à un pas de temps donné, on ne connaît pas le futur. La formulation d'un problème sur un arbre induit ainsi une contrainte de non-anticipativité sous-jacente.

Définition 6.2. Une variable définie sur le peigne de scénarios est dite *non anticipative* si, lorsque deux scénarios sont couplés en un nœud, les éléments de cette variable en ces scénarios et en le pas de temps correspondant sont identiques. Cela s'exprime par la règle suivante : si deux scénarios $s, s' \in \mathcal{S}$ sont *indiscernables* - c'est-à-dire confondus dans l'arbre - à un certain pas de temps $t \in \{1, \dots, T\}$ (sur la base de l'information dont on dispose à t), alors :

$$\forall t' \leq t, \quad X_{t'}(s) = X_{t'}(s').$$

6.2.2.3 Modélisation

Comme nous l'avons dit précédemment, le principe de l'algorithme du recouvrement progressif repose sur la relaxation de la contrainte de non-anticipativité, dont nous avons alors besoin de préciser l'expression. Pour modéliser cette contrainte, on partitionne, à chaque pas de temps, l'ensemble des scénarios \mathcal{S} en un nombre fini d'ensembles disjoints dits *paquets de scénarios*, de sorte que les scénarios d'un même paquet soient indiscernables au pas de temps correspondant. Par exemple, sur la partie droite de la figure 6.1, les paquets correspondent aux ovales bleus qui encerclent, à chaque pas de temps, les scénarios qui doivent être identiques. Chacun de ces paquets coïncide avec un unique nœud de l'arbre, à gauche de la figure.

Pour $t \in \{1, \dots, T\}$, on note alors \mathcal{A}_t la collection de tous les paquets A de scénarios existants au pas de temps t .

². Par exemple, dans le cas d'un problème de gestion de production d'électricité formulé sur un arbre, en général au moins un des scénarios est représentatif d'un hiver particulièrement froid.

Définition 6.3. On dit qu'une stratégie $X \in \mathcal{E}$ est *implémentable* si

$$\forall t \in \{1, \dots, T\}, \forall A \in \mathcal{A}_t, \quad X_t \text{ est constant sur } A,$$

c'est-à-dire que $X_t(s)$ est indépendant de $s \in A$.

On note \mathcal{N} l'ensemble des *stratégies implémentables*.

Définition 6.4. On dit qu'une stratégie $X \in \mathcal{E}$ est *admissible* si :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad X(s) \in C_s,$$

c'est-à-dire que $X(s)$ satisfait les contraintes de (6.1).

On note \mathcal{C} l'ensemble des *stratégies admissibles*.

Définition 6.5. Une stratégie est dite *réalisable* si elle à la fois admissible et implémentable.

Remarque : En général, en optimisation, les qualificatifs « réalisable » et « admissible » ont la même signification. Dans ce cadre, nous en avons cependant distingué les définitions.

Le problème que l'on cherche à résoudre consiste alors à minimiser le critère

$$F(X) = \sum_{s \in \mathcal{S}} f_s(X(s))$$

sur l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{N}$, c'est-à-dire sur l'ensemble des stratégies réalisables.

Remarque : Dans les articles [Rockafellar et Wets, 1991] et [Wets, 1989], les auteurs précisent qu'ils attachent davantage d'importance à l'obtention d'une stratégie implémentable qu'admissible; en effet, la non-admissibilité peut ne concerner qu'un scénario très improbable, ou encore une violation très légère des contraintes.

6.2.3 L'opérateur d'agrégation

6.2.3.1 Définition

Pour chaque pas de temps $t \in \{1, \dots, T\}$, et pour chaque paquet $A \in \mathcal{A}_t$, on peut calculer la moyenne pondérée des stratégies. On note

$$X_t(A) = \frac{1}{\sum_{s \in A} p_s} \sum_{s \in A} p_s X_t(s).$$

Pour chaque scénario $s \in A$, on définit alors

$$\hat{X}_t(s) = X_t(A).$$

La stratégie \hat{X} étant par définition une stratégie implémentable, on définit l'opérateur dit d'agrégation

$$J: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{N} \\ X & \mapsto & \hat{X} \end{array}$$

dont on vérifie aisément qu'il est un projecteur de \mathcal{E} sur \mathcal{N} ($J^2 = J$). Par exemple, si l'on considère la représentation de la figure 6.1, avec la notation $(JX)_{t,s} = \hat{X}_t(s)$, on a :

$$\begin{aligned} (JX)_{t=2,s=1} &= (JX)_{t=2,s=2} = (JX)_{t=2,s=3} = p_1 X_2(1) + p_2 X_2(2) + p_3 X_2(3), \\ (JX)_{t=3,s=1} &= X_3(1), \\ (JX)_{t=3,s=2} &= (JX)_{t=3,s=3} = \frac{p_2 X_3(2) + p_3 X_3(3)}{p_2 + p_3}. \end{aligned}$$

En outre, $\mathbb{E}[X(s)] = \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s X(s)$ et $X_t(A) = \mathbb{E}[X(s)|A]$. De ce fait, J est l'opérateur d'espérance conditionnelle relativement à la structure d'information et aux valeurs des probabilités d'occurrence $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$.

Remarque : A priori, l'opérateur J ne conserve pas l'admissibilité, à moins que les ensembles C_s ne soient convexes et indépendants du scénario s .

6.2.3.2 Structure euclidienne

On rappelle que le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^{mT} et la norme associée sont notés, comme à l'accoutumée, $\langle x, y \rangle$ et $\|x\|_2$.

On définit un produit scalaire sur \mathcal{E} :

$$\langle X|Y \rangle = \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \langle X(s), Y(s) \rangle,$$

et la norme associée :

$$\|X\|_{\mathcal{S}} = \sqrt{\sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \|X(s)\|_2^2}.$$

L'opérateur J est alors un projecteur orthogonal de \mathcal{E} sur \mathcal{N} pour ce produit scalaire. Soit \mathcal{M} l'orthogonal à \mathcal{N} dans \mathcal{E} pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^\perp$$

et

$$K = Id - J$$

l'opérateur de projection orthogonale de \mathcal{E} sur \mathcal{M} . Alors une stratégie X est implémentable si, et seulement si,

$$KX = 0.$$

Ainsi, le problème que l'on se propose de résoudre se formule de la manière suivante :

$$\begin{cases} \inf_{X \in \mathcal{C}} F(X), \\ KX = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

6.3 Principe du recouvrement progressif

6.3.1 Dénomination de l'algorithme

Comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre (au paragraphe 6.1.1), l'article à l'origine de l'algorithme, [Rockafellar et Wets, 1991], le présente sous le nom anglais de « progressive hedging ». Il nous a semblé opportun de chercher une traduction française adéquate pour l'appellation de cet algorithme.

Le verbe « to hedge » possède plusieurs significations ; entre autres, il peut à la fois exprimer le fait d'entourer quelque chose, et également de se couvrir, se protéger contre un risque. En outre, Rockafellar et Wets justifient leur choix pour le nom de l'algorithme en spécifiant qu'il permet de s'approcher progressivement (à chaque itération) d'une stratégie implémentable, c'est-à-dire qui est non anticipative. Ils précisent également, dans l'introduction de l'article, que l'approche qu'ils proposent permet d'obtenir une solution qui soit une bonne couverture contre le risque, à partir de solutions associées aux scénarios pris indépendamment. En effet, le fait d'optimiser un problème sur un arbre de scénarios, et non de manière déterministe, est un moyen de prendre en compte les différents aléas qui peuvent survenir, et donc de se prémunir contre des risques éventuels.

Nous avons alors choisi de traduire le nom de l'algorithme en français par l'appellation de « recouvrement progressif ». Ainsi, le terme « recouvrement » permet de conserver deux acceptions de celui d'origine (« hedging ») ; il renvoie à la notion de « couverture du risque » et suggère également le fait que la contrainte de non-anticipativité est progressivement « recouverte » par les itérés primaires de l'algorithme.

6.3.2 Un lagrangien augmenté « local »

Comme on l'a vu au paragraphe 6.1.2, le principe de l'algorithme consiste à relaxer la contrainte qui couple les scénarios entre eux, c'est-à-dire la contrainte de non-anticipativité, de manière à résoudre ensuite un problème décomposé scénario par scénario.

La formulation (6.2) du problème permet de dualiser la contrainte de non-anticipativité et d'écrire le lagrangien augmenté associé : $L_r(X, W) = F(X) + \langle KX|W \rangle + \frac{r}{2} \|KX\|_{\mathcal{S}}^2$ où le multiplicateur W peut s'interpréter comme le prix de l'information. Puisque K est auto-adjoint, $\langle KX|W \rangle = \langle X|KW \rangle$. Ainsi, le lagrangien ne fait intervenir que la projection de W sur \mathcal{M} , et si $W \in \mathcal{M}$, $KW = W$ et L_r s'écrit comme l'application qui à $(X, W) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M}$ associe

$$L_r(X, W) = F(X) + \langle X|W \rangle + \frac{r}{2} \|X - \hat{X}\|_{\mathcal{S}}^2.$$

L'idée d'origine est d'appliquer au problème (6.2) un algorithme de lagrangien augmenté, c'est-à-dire de suivre un schéma itératif :

- $X^{k+1} = \arg \min_{X \in \mathcal{C}} L_r(X, W^k)$,
- $W^{k+1} = W^k + rKX^{k+1}$,

où $r > 0$ est un paramètre à régler.

Cependant, du fait du terme quadratique $\|X - \hat{X}\|_{\mathcal{S}}^2 = \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \|X(s) - \hat{X}(s)\|_2^2$, le lagrangien augmenté considéré n'est pas décomposable scénario par scénario. En effet, à cause de la dépendance de $\hat{X}(s)$ en les autres scénarios du même paquet que s , il contient des produits de termes croisés, c'est-à-dire se rapportant à des scénarios distincts.³

L'approche décrite dans [Rockafellar et Wets, 1991] consiste alors à suivre un schéma itératif similaire, mais en fixant, lors des minimisations du lagrangien augmenté, la projection implémentable de la variable intervenant dans son terme quadratique. Ainsi, à chaque itération, on minimise un lagrangien augmenté que l'on pourrait qualifier de « local » :

$$L_r^k(X) = F(X) + \langle X|W^k \rangle + \frac{r}{2} \|X - \hat{X}^k\|_{\mathcal{S}}^2, \quad (6.3)$$

dont le terme quadratique $\|X - \hat{X}^k\|_{\mathcal{S}}^2 = \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \|X(s) - \hat{X}^k(s)\|_2^2$ est cette fois séparable par scénarios⁴. On résout donc, à chaque itération k et pour chaque scénario $s \in \mathcal{S}$, le problème suivant :

$$\inf_{x \in \mathcal{C}_s} f_s(x) + \langle x, W^k(s) \rangle + \frac{r}{2} \|x - \hat{X}^k(s)\|_2^2. \quad (6.4)$$

Puis, les multiplicateurs sont mis à jour par la formule :

$$W^{k+1} = W^k + rKX^{k+1}. \quad (6.5)$$

Remarques :

1. À chaque itération de l'algorithme, on dispose ainsi d'une stratégie admissible X^k (non nécessairement implémentable) et d'une stratégie implémentable \hat{X}^k (non nécessairement admissible).
2. À condition que le prix initial W^0 soit dans \mathcal{M} , tous les prix W^k calculés par l'algorithme le sont également, du fait de leur formule de mise à jour (6.5) car $KX^{k+1} \in \mathcal{M}$.
3. On peut également justifier le choix de ne considérer que des multiplicateurs dans $\mathcal{M} = \mathcal{N}^\perp$ par l'expression équivalente du problème primal (6.2) (qui dualise la contrainte $KX = 0$ équivalente à $X \in \mathcal{N}$) :

$$\inf_{X \in \mathcal{C}} \sup_{W \in \mathcal{M}} F(X) + \langle X|W \rangle.$$

3. Dans le cas d'un arbre de grande taille, la minimisation du lagrangien augmenté à chaque itération risque ainsi de s'avérer trop coûteuse en temps de calcul.

4. La projection $\hat{X}^k(s)$ est calculée en amont de la minimisation et ne nécessite pas d'être développée, dans l'expression considérée, comme une somme sur les scénarios appartenant au même paquet que s .

6.3.3 L'algorithme

Nous présentons ci-dessous l'algorithme du recouvrement progressif.

Algorithme 4 (Recouvrement progressif)

1. Initialisation :
 - $k = 0$;
 - $X^0 \in \mathcal{E}$;
 - $W^0 \in \mathcal{M}$.
2. Calcul de la projection implémentable de l'itéré (admissible) courant :
 - $\hat{X}^k = JX^k$.
3. Mise à jour de l'itéré primal courant :
 - $\forall s \in \mathcal{S}, X^{k+1}(s)$ est solution de (6.4).
4. Mise à jour des multiplicateurs :
 - $W^{k+1} = W^k + rKX^{k+1}$.
5. Vérification du critère d'arrêt :
 - si le critère n'est pas satisfait : $k \leftarrow k + 1$ et retour à l'étape 2 ;
 - sinon, l'algorithme s'arrête et fournit X^{k+1} comme solution (quasi-) implémentable et admissible.

Remarques :

1. Une éventuelle initialisation primale, suggérée par [Rockafellar et Wets, 1991], est de choisir, pour tout $s \in \mathcal{S}$, $X^0(s)$ solution optimale de (6.1).
2. Une éventuelle initialisation duale, également suggérée par [Rockafellar et Wets, 1991], est de choisir, pour tout $s \in \mathcal{S}$, $W^0 = 0$.
3. Nous avons tout d'abord travaillé avec un critère d'arrêt lié à la progression duale

$$\|X^{k+1} - \hat{X}^{k+1}\| \simeq 0,$$

que nous avons par la suite enrichi de l'observation de l'évolution primale. Plus de précisions à ce sujet seront fournies dans la partie IV.

4. L'algorithme hérite du lagrangien augmenté la propriété de ne pas devoir déterminer un pas dans la mise à jour des variables duales, et il n'est alors pas nécessaire d'effectuer de recherche linéaire sur la fonction duale. En effet, comme le montrent les résultats de convergence présentés à la section 6.5.3, le pas r est adéquat dans le cas convexe.

6.3.4 Interprétation des multiplicateurs

Les articles [Rockafellar et Wets, 1991, Barruncho *et col.*, 1999] interprètent les multiplicateurs optimaux W^* comme des vecteurs de prix. Plus précisément, pour un scénario s , $W^*(s)$ correspond au coût occasionné par un changement rétrospectif de stratégie, c'est-à-dire par le fait de ne pas choisir une solution implémentable en se basant sur la connaissance du futur⁵. Il s'agit en quelque sorte de la valeur de l'information dans un environnement incertain. Ainsi, de hautes valeurs peuvent refléter une difficulté à calculer des stratégies adaptées à l'arbre, ou bien des solutions moins robustes (c'est-à-dire moins « optimales » sur chaque scénario considéré indépendamment).

5. Par exemple : si, au lieu de la stratégie implémentable $X(s)$, on choisit $X(s) + U(s)$, cela coûtera $U(s).W^*(s)$.

6.4 Interprétations de l'algorithme

6.4.1 Un lagrangien augmenté minimisé approximativement par Gauss-Seidel

Il est possible de fournir une interprétation de l'algorithme du recouvrement progressif comme étant un algorithme de lagrangien augmenté dont les sous-problèmes sont résolus approximativement par une itération de la méthode de Gauss-Seidel, présentée dans [Bertsekas et Tsitsiklis, 1997, chapitre 3]. Cette explication est reprise de [Dussault *et col.*, 2005, Lenoir et Mahey, 2007].

Pour retrouver une telle interprétation, on reformule tout d'abord le problème à résoudre en insérant une variable auxiliaire Y dupliquant les variables de (6.2) :

$$(6.2) \Leftrightarrow \begin{cases} \inf_{X \in \mathcal{C}, Y \in \mathbb{R}^{mT}} F(X), \\ X = Y, \\ KY = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

On dualise alors la contrainte $X = Y$ dite « de duplication », en utilisant le lagrangien augmenté du problème :

$$\ell_r(X, Y, \lambda) = F(X) + \langle \lambda | X - Y \rangle + \frac{r}{2} \|X - Y\|_{\mathcal{S}}^2.$$

Ainsi, l'algorithme du lagrangien augmenté appliqué à (6.6) s'écrit :

Algorithme (Lagrangien augmenté appliqué à (6.6))

1. Initialisation ($k = 0$) : choix de X^0, Y^0, λ^0 .
2. (X^{k+1}, Y^{k+1}) solution de $\begin{cases} \inf_{X \times Y \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}^{mT}} \ell_r(X, Y, \lambda^k), \\ KY = 0. \end{cases}$
3. $\lambda^{k+1} = \lambda^k + r(X^{k+1} - Y^{k+1})$.
4. Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait : $k \leftarrow k + 1$ et retour à l'étape 2.

Si la minimisation en X, Y de l'étape 2 est effectuée séquentiellement par une itération de la méthode de Gauss-Seidel, c'est-à-dire en X puis en Y , on obtient, après calcul de X^{k+1} :

$$Y^{k+1} \in \arg \min_{KY=0} \ell_r(X^{k+1}, Y, \lambda^k),$$

c'est-à-dire que Y^{k+1} est solution d'un problème de minimisation d'une fonction quadratique (dont le hessien est l'identité) sur l'espace \mathcal{N} (qui est un convexe fermé). On peut alors calculer explicitement Y^{k+1} comme la projection sur \mathcal{N} de $X^{k+1} + \frac{1}{r}\lambda^k$. Ainsi :

$$Y^{k+1} = J(X^{k+1} + \frac{1}{r}\lambda^k).$$

On obtient ainsi ci-dessous une nouvelle version de l'algorithme du lagrangien augmenté appliqué au problème (6.6).

Algorithme (Lagrangien augmenté appliqué à (6.6), avec minimisation approchée séquentielle)

1. Initialisation ($k = 0$) : choix de X^0, Y^0, λ^0 .
2. Minimisations successives en X et Y :
 - $X^{k+1} \in \arg \min_{X \in \mathcal{C}} \ell_r(X, Y^k, \lambda^k)$;
 - $Y^{k+1} = J(X^{k+1} + \frac{1}{r}\lambda^k)$.
3. $\lambda^{k+1} = \lambda^k + r(X^{k+1} - Y^{k+1})$.

4. Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait : $k \leftarrow k + 1$ et retour à l'étape 2.

On montre alors le lemme suivant.

Lemme 6.6. *Si $\lambda^0 \in \mathcal{M}$, à chaque itération $k : \lambda^k \in \mathcal{M}$.*

PREUVE : On raisonne par récurrence. Si $\lambda^k \in \mathcal{M}$, $Y^{k+1} = J(X^{k+1})$, et $\lambda^{k+1} = \lambda^k + rKX^{k+1} \in \mathcal{M}$.
 \diamond

Ainsi, les mises à jour des Y^k et des λ^k s'écrivent respectivement : $Y^{k+1} = J(X^{k+1}) = \hat{X}^{k+1}$, et $\lambda^{k+1} = \lambda^k + r(X^{k+1} - \hat{X}^{k+1})$. On peut alors simplifier l'écriture de l'algorithme du lagrangien augmenté appliqué à (6.6), avec minimisation approchée séquentielle.

Algorithme (Lagrangien augmenté appliqué à (6.6), avec minimisation approchée séquentielle, simplifié)

1. Initialisation ($k = 0$) : choix de $X^0, \lambda^0 \in \mathcal{M}$.
2. $X^{k+1} \in \arg \min_{X \in \mathcal{C}} \ell_r(X, \hat{X}^k, \lambda^k)$.
3. $\lambda^{k+1} = \lambda^k + r(X^{k+1} - \hat{X}^{k+1})$.
4. Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait : $k \leftarrow k + 1$ et retour à l'étape 2.

L'algorithme 4 correspond ainsi à l'algorithme du lagrangien augmenté appliqué à (6.6), avec une itération de minimisation séquentielle par la méthode de Gauss-Seidel pour approcher la solution de l'étape de minimisation du lagrangien augmenté.

6.4.2 Interprétation en termes de recherche de points-selles

L'algorithme du recouvrement progressif peut également s'interpréter comme un algorithme proximal primal-dual sur un certain lagrangien. C'est sur cette interprétation proximale qu'est fondée la démonstration de convergence de [Rockafellar et Wets, 1991]. En outre, elle fournit un éclairage sur la difficulté du réglage du paramètre de pénalisation r .

On définit

$$\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{N} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \\ (V, U) \mapsto F(U + V) + \delta_{\mathcal{C}}(U + V). \end{array}$$

On a alors

$$\begin{cases} \inf_{V \in \mathcal{N}, U \in \mathcal{M}} \varphi(V, U) \\ U = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (6.2).$$

On peut considérer le recouvrement progressif comme un algorithme qui cherche, à chaque itération, à mettre à jour un couple primal-dual $(\hat{X}, W) = (V, W)$. C'est la raison pour laquelle on cherche à définir un lagrangien du problème (6.2) en (V, W) . On introduit alors

$$L : \begin{array}{l} \mathcal{N} \times \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ (V, W) \mapsto \inf_{U \in \mathcal{M}} (\varphi(V, U) + \langle U | W \rangle). \end{array} \quad (6.7)$$

que l'on interprète comme un lagrangien de (6.2). En effet, comme le montre la proposition 6.10 ci-dessous, il a les mêmes points-selles que le lagrangien ordinaire du problème (6.2) défini par

$$\ell : \begin{array}{l} \mathcal{E} \times \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ (X, W) \mapsto F(X) + \delta_{\mathcal{C}}(X) + \langle W | X \rangle. \end{array} \quad (6.8)$$

On rappelle ici la définition d'un point-selle.

Définition 6.7. Soit X, Y deux ensembles et une application $\varphi : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Un couple de vecteurs $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ est un *point-selle* de φ sur $X \times Y$ si

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \varphi(\bar{x}, y) \leq \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leq \varphi(x, \bar{y}).$$

Pour obtenir le résultat évoqué ci-dessus sur les points-selles de ces lagrangiens, on commence par démontrer le lemme 6.9, dont la preuve utilise la conservation de la convexité par la fonction marginale, notion dont on rappelle ici la définition

Définition 6.8. La *fonction marginale* associée à une application $\varphi : A \times B \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, avec A et B deux ensembles, est la fonction définie par

$$f : \begin{array}{l} A \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ x \mapsto \inf_{y \in B} \varphi(x, y). \end{array}$$

Lemme 6.9. Si F et \mathcal{C} sont convexes, alors :

- (i) $\forall W \in \mathcal{M}$, $L(\cdot, W)$ est convexe sur \mathcal{N} ,
- (ii) $\forall V \in \mathcal{N}$, $L(V, \cdot)$ est concave et fermée sur \mathcal{M} .

PREUVE :

- (i) Soit $W \in \mathcal{M}$. Puisque F et \mathcal{C} sont convexes, φ l'est également, ainsi que l'application définie dans $\mathcal{N} \times \mathcal{M} : (V, U) \mapsto (\varphi(V, U) + \langle U|W \rangle)$, et donc que $L(\cdot, W)$ qui est sa fonction marginale.
- (ii) Soit $V \in \mathcal{N}$ et $U \in \mathcal{M}$. L'application $W \mapsto (\varphi(V, U) + \langle U|W \rangle)$ est linéaire, donc concave et fermée, et son enveloppe inférieure $L(V, \cdot)$ l'est alors également. ◇

On montre à présent que ℓ et L ont les mêmes points-selles. Ce résultat nous sera également utile pour fournir une interprétation de l'algorithme liée au calcul de points-selles d'un « lagrangien augmenté » du problème. Ainsi, la proposition suivante n'est pas issue de [Rockafellar et Wets, 1991] mais a vocation à éclairer la démarche suivie dans cet article.

Proposition 6.10. On suppose \mathcal{C} non vide.

1. Si (X^*, W^*) est un point-selle de ℓ sur $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$, alors $X^* \in \mathcal{C} \cap \mathcal{N}$ et (X^*, W^*) est un point-selle de L sur $\mathcal{N} \times \mathcal{M}$.
2. Si $F \in \text{Conv}(\mathcal{E})$, si \mathcal{C} est un convexe fermé de \mathcal{E} et si (V^*, W^*) est un point-selle de L sur $\mathcal{N} \times \mathcal{M}$, alors (V^*, W^*) est un point-selle de ℓ sur $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$.

PREUVE :

[1.] Soit (X^*, W^*) un point-selle de ℓ sur $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$. Alors, par définition, pour tout $X \in \mathcal{E}$, $W \in \mathcal{M}$, on a :

$$\ell(X^*, W) \leq \ell(X^*, W^*) \leq \ell(X, W^*), \tag{6.9}$$

que l'on réécrit :

$$F(X^*) + \delta_{\mathcal{C}}(X^*) + \langle W|X^* \rangle \leq F(X^*) + \delta_{\mathcal{C}}(X^*) + \langle W^*|X^* \rangle \leq F(X) + \delta_{\mathcal{C}}(X) + \langle W^*|X \rangle. \tag{6.10}$$

Si l'on applique à un $X \in \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ l'inéquation de droite de 6.10, on obtient que $\delta_{\mathcal{C}}(X^*)$ est fini, et donc que

$$X^* \in \mathcal{C}. \tag{6.11}$$

Ainsi, l'inéquation de gauche de 6.10 se réécrit pour tout $W \in \mathcal{M}$:

$$\langle W|X^* \rangle \leq \langle W^*|X^* \rangle,$$

ce dont on déduit⁶ :

$$X^* \in \mathcal{N}. \quad (6.12)$$

Ainsi, en utilisant l'inéquation de droite de 6.10, on obtient :

$$\forall X \in \mathcal{E}, \quad F(X^*) \leq F(X) + \delta_{\mathcal{C}}(X) + \langle W^* | X \rangle,$$

c'est-à-dire, puisque $W^* \in \mathcal{M}$,

$$\forall (U, V) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}, \quad F(X^*) \leq F(U + V) + \delta_{\mathcal{C}}(U + V) + \langle W^* | U \rangle,$$

et en passant à la borne inférieure en $U \in \mathcal{M}$ on a, pour tout $(U, V) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$,

$$F(X^*) \leq \inf_{U \in \mathcal{M}} (F(U + V) + \delta_{\mathcal{C}}(U + V) + \langle W^* | U \rangle) \leq F(U + V) + \delta_{\mathcal{C}}(U + V) + \langle W^* | U \rangle,$$

soit en utilisant la définition (6.7) de $L : \forall (U, V) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$,

$$F(X^*) \leq L(V, W^*) \leq F(U + V) + \delta_{\mathcal{C}}(U + V) + \langle W^* | U \rangle. \quad (6.13)$$

Or, si l'on pose $U^* = KX^*$ ($= 0$ d'après (6.12)) et $V^* = JX^*$ ($= X^*$), on a, en utilisant (6.11) et la définition de L ,

$$F(X^*) = F(U^* + V^*) + \delta_{\mathcal{C}}(U^* + V^*) + \langle W^* | U^* \rangle \geq L(V^*, W^*).$$

Ainsi, avec l'inégalité de gauche de (6.13) appliquée en $V = V^*$, on en déduit :

$$F(X^*) = L(V^*, W^*). \quad (6.14)$$

Ainsi, d'après (6.13) et (6.14), on obtient l'inégalité de droite caractérisant un point-selle de L , c'est-à-dire :

$$\forall V \in \mathcal{N}, \quad L(V^*, W^*) \leq L(V, W^*). \quad (6.15)$$

De plus, pour tout $W \in \mathcal{M}$, par définition de L ,

$$\begin{aligned} L(V^*, W) &\leq F(U^* + V^*) + \delta_{\mathcal{C}}(U^* + V^*) + \langle W | U^* \rangle \\ &= F(X^*) \quad [X^* \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}] \\ &= L(V^*, W^*) \quad [(6.14)]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

On déduit de (6.16) et (6.15) que $(V^*, W^*) = (X^*, W^*)$ (avec $X^* \in \mathcal{N}$) est un point-selle de L sur $\mathcal{N} \times \mathcal{M}$.

[2.] Soit (V^*, W^*) un point-selle de L sur $\mathcal{N} \times \mathcal{M}$. Alors, pour tout $(V, W) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$, on a :

$$L(V^*, W) \leq L(V^*, W^*) \leq L(V, W^*). \quad (6.17)$$

On définit l'application $\varphi_{V^*} : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ par : pour tout $U \in \mathcal{M}$, $\varphi_{V^*}(U) = \varphi(V^*, U)$. Alors, l'inégalité de gauche de (6.17) s'écrit, en utilisant la définition de L :

$$\forall W \in \mathcal{M}, \quad \inf_{U \in \mathcal{M}} (\varphi_{V^*}(U) + \langle U | W \rangle) \leq \inf_{U \in \mathcal{M}} (\varphi_{V^*}(U) + \langle U | W^* \rangle),$$

c'est-à-dire, en introduisant la conjuguée de Fenchel $\varphi_{V^*}^*$ de φ_{V^*} :

$$\forall W \in \mathcal{M}, \quad \varphi_{V^*}^*(-W) \leq \varphi_{V^*}^*(-W^*).$$

6. En effet, pour $W = W^* + KX^* \in \mathcal{M}$, on a $\langle KX^* | X^* \rangle = \|KX^*\|_{\mathcal{S}}^2 \leq 0$.

Ainsi, $0 \in \partial\varphi_{V^*}^*(-W^*)$, et puisque $\varphi_{V^*} \in \overline{\text{Conv}}(\mathcal{M})$ (car $F \in \overline{\text{Conv}}(\mathcal{E})$ et \mathcal{C} est fermé non vide) $-W^* \in \partial\varphi_{V^*}(0)$. On en déduit que 0 minimise $u \rightarrow \varphi_{V^*}(U) + \langle U|W^* \rangle$. Cela s'exprime, d'après les définitions (6.7) et (6.8) de L et ℓ , par :

$$\begin{aligned} L(V^*, W^*) &= F(V^*) + \delta_{\mathcal{C}}(V^*) \\ &= \ell(V^*, W^*) \quad [\text{car } V^* \in \mathcal{N}, W^* \in \mathcal{M}]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Ainsi, par (6.18) et l'inégalité de droite de (6.17), on a :

$$\begin{aligned} \ell(V^*, W^*) &\leq \inf_{U \in \mathcal{M}} (F(U + V) + \delta_{\mathcal{C}}(U + V) + \langle U|W^* \rangle) \quad \forall V \in \mathcal{N} \\ &\leq F(U + V) + \delta_{\mathcal{C}}(U + V) + \langle U|W^* \rangle \quad \forall (U, V) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \\ &\leq F(X) + \delta_{\mathcal{C}}(X) + \langle X|W^* \rangle \quad \forall X \in \mathcal{E} \\ &= \ell(X, W^*) \quad \forall X \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Et puisque $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}$:

$$\forall X \in \mathcal{N}, \quad \ell(V^*, W^*) \leq \ell(X, W^*). \quad (6.19)$$

De plus, comme $V^* \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} &\forall W \in \mathcal{M}, \quad \langle W|V^* \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\forall W \in \mathcal{M}, \quad \ell(V^*, W) = \ell(V^*, W^*). \end{aligned} \quad (6.20)$$

On déduit de (6.20) et (6.19) que (V^*, W^*) est un point-selle de ℓ sur $\mathcal{E} \times \mathcal{M}$. ◇

On fournit à présent une interprétation de l'algorithme en termes de recherche de points-selles, qui permet d'expliquer les difficultés inhérentes au réglage du paramètre r . La proposition suivante est issue de [Rockafellar et Wets, 1991, proposition 5.3]. Elle peut se démontrer par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de la proposition 6.10.

Proposition 6.11. *On considère l'algorithme dans le cas convexe. Alors, à chaque itération k , l'algorithme du recouvrement progressif calcule le point proximal primal-dual de L , qui est l'unique point-selle de la fonction convexe-concave*

$$L^k : \begin{array}{l} \mathcal{N} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \\ (V, W) \mapsto L(V, W) + \frac{r}{2} \|V - \hat{X}^k\|^2 - \frac{1}{2r} \|W - W^k\|^2 \end{array}$$

avec minimisation par rapport à la première variable, et maximisation par rapport à la seconde.

Du fait des facteurs r et $1/r$ devant les termes quadratiques primal et dual de L^k , le choix du paramètre de pénalisation nécessite un certain compromis ; une faible valeur encourage les progrès de la suite primale $(\hat{X}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ mais risque de freiner ceux de la suite duale $(W^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et, inversement, une valeur importante accélère l'évolution de la suite duale mais ralentit celle de la suite primale. Remarque : Un même facteur r devant les termes quadratiques primal et dual de L^k faciliterait grandement le choix du paramètre ; il suffirait ainsi de considérer un r « suffisamment » petit pour obtenir une convergence rapide. Cependant, nous ne sommes pas parvenus à définir un algorithme décomposable qui calcule les points-selles d'une telle fonction.

6.4.3 Interprétation proximale

Pour démontrer la convergence de l'algorithme, les auteurs de [Rockafellar et Wets, 1991] utilisent l'argument selon lequel il s'agit d'un algorithme proximal associé à un opérateur T_r , avec un paramètre unité, puis font appel au résultat de convergence issu de [Rockafellar, 1976b, théorème 2]. Cet opérateur T_r est défini comme le sous-différentiel convexe-concave d'un lagrangien L_r similaire à celui (L) que nous avons introduit précédemment. Plus précisément, il s'écrit

$$L_r : \begin{array}{ll} \mathcal{N} \times \mathcal{M} & \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ (V, W) & \mapsto \frac{1}{r}L(V, rW), \end{array}$$

et on peut également montrer que ses points-selles coïncident avec ceux du lagrangien classique ℓ . On définit ainsi

$$T_r := \partial_V L_r(V, \bar{W}) \times \partial_{\bar{W}}(-L_r)(V, \bar{W}),$$

avec $\bar{W} := \frac{1}{r}W$.

L'intérêt présenté par cet opérateur est qu'il permet d'interpréter le recouvrement progressif comme un algorithme proximal avec un paramètre unité, contrairement à l'opérateur

$$T := \partial_V L(V, W) \times \partial_W(-L)(V, W), \tag{6.21}$$

qui nécessiterait d'introduire une application

$$M^k : \begin{array}{ll} \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\perp & \rightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\perp \\ (V, W) & \mapsto (\frac{1}{r}V, rW), \end{array}$$

de manière à ce qu'une itération du recouvrement progressif coïncide avec

$$(V^{k+1}, W^{k+1}) := (Id + M^k T)^{-1}(V^k, W^k).$$

Le résultat suivant a ainsi été démontré dans [Rockafellar et Wets, 1991, preuve du théorème 5.1].

Théorème 6.12. *Dans le cadre de la résolution d'un problème convexe, l'algorithme 4, avec un paramètre r fixe, est l'algorithme proximal associé à l'opérateur T_r avec paramètre unité.*

Remarque : Ce résultat est essentiel pour démontrer la convergence globale de l'algorithme (présentée plus précisément à la section 6.5.3). Cependant, il nécessite d'employer un paramètre r fixe qui doit, en pratique, être choisi.

6.4.4 Un algorithme de séparation

On peut également considérer, comme c'est le cas dans [Ruszczynski, 2003, section 9.2], qu'il s'agit d'un algorithme de séparation, s'inspirant de la technique de [Lions et Mercier, 1979], interprété comme l'algorithme de Douglas-Rachford (décrit dans [Douglas et Rachford, 1956]) pour minimiser la somme de deux opérateurs monotones (en l'occurrence, les deux opérateurs sont $\partial\delta_{\mathcal{N}}$ et $\partial(F + \delta_{\mathcal{C}})$).

6.5 Résultats théoriques disponibles

Comme on l'a vu aux paragraphes 6.4.2 et 6.4.3, l'algorithme peut être perçu comme un cas particulier de la méthode proximale pour trouver un zéro d'un opérateur monotone maximal (méthode décrite dans [Rockafellar, 1976b]), et c'est ce point de vue qui permet de démontrer un certain nombre des résultats présentés ci-dessous.

6.5.1 Hypothèses générales

Les résultats issus de [Rockafellar et Wets, 1991] et [Wets, 1989] montrent que l'algorithme s'applique à des problèmes assez généraux, sous des hypothèses peu restrictives.

Hypothèses 6.13.

- $\forall s \in \mathcal{S}$, \mathcal{C}_s est fermé non vide,
- $\forall s \in \mathcal{S}$, f_s est localement lipschitzienne sur \mathbb{R}^m et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, ses ensembles de sous-niveau $\{x \in \mathcal{C}_s / f_s(x) \leq \alpha\}$ sont bornés⁷.

6.5.2 Résultats intermédiaires

Les deux propositions ci-dessous sont issues respectivement de [Rockafellar et Wets, 1991, propositions 3.1 et 3.2].

Proposition 6.14. *Sous les hypothèses 6.13, tous les sous-problèmes (6.1) associés aux scénarios $s \in \mathcal{S}$ sont bornés et ont au moins une solution. La moyenne pondérée de leurs valeurs optimales fournit en outre une borne inférieure de la valeur optimale de (6.2).*

Proposition 6.15. *Sous les hypothèses 6.13, tous les sous-problèmes (6.4) résolus à chaque itération k , pour chaque scénario $s \in \mathcal{S}$, sont bornés et ont au moins une solution. Dans le cas convexe, il y a de plus unicité de leurs solutions respectives.*

6.5.3 Convergence

On considère le problème dual associé à (6.2), obtenu en dualisant par le lagrangien la contrainte de non-anticipativité :

$$\max_{W \in \mathcal{M}} \inf_{X \in \mathcal{C}} F(X) + \langle X | W \rangle. \quad (6.22)$$

Définition 6.16. On définit la *norme- r* d'un couple primal-dual $(X, W) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$:

$$\|(X, W)\|_r = (\|X\|_{\mathcal{S}}^2 + r^{-2}\|W\|_{\mathcal{S}}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Le théorème suivant (issu de [Rockafellar et Wets, 1991, théorème 5.1]) assure la convergence de l'algorithme dans le cas convexe ; à chaque itération, l'algorithme fait un progrès vers l'optimum, tant que celui-ci n'est pas atteint.

Théorème 6.17. *On considère l'algorithme dans le cas convexe, sous les hypothèses 6.13, avec un choix arbitraire de $X^0 \in \mathcal{E}$ et de $W^0 \in \mathcal{M}$. Alors :*

1. Les suites $(\hat{X}^k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(W^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont bornées si, et seulement si, les problèmes primal (6.2) et dual (6.22) admettent une solution (X^*, W^*) .
2. Dans ce cas, même si l'on n'a pas unicité des solutions primale et duale, la suite $(\hat{X}^k, W^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution primale-duale (X^*, W^*) .
3. De plus, à chaque itération k , on a :

$$\|(\hat{X}^{k+1}, W^{k+1}) - (X^*, W^*)\|_r \leq \|(\hat{X}^k, W^k) - (X^*, W^*)\|_r,$$

avec inégalité stricte, à moins que $(\hat{X}^k, W^k) = (X^*, W^*)$.

4. En outre, à chaque itération, on a également :

$$\|(\hat{X}^{k+1}, W^{k+1}) - (\hat{X}^k, W^k)\|_r \leq \|(\hat{X}^k, W^k) - (\hat{X}^{k-1}, W^{k-1})\|_r.$$

7. Il suffit pour cela que f_s soit convexe.

De plus, dans le cas de la minimisation d'un critère quadratique sous des contraintes linéaires, [Rockafellar et Wets, 1991, théorème 5.2] démontre que la convergence de l'algorithme est linéaire globale.

Théorème 6.18. *On considère l'algorithme dans le cas linéaire-quadratique, et on suppose que les problèmes primal (6.2) et dual (6.22) ont chacun une unique solution. Alors, il existe une valeur $\theta_r \in [0, 1[$ telle qu'à chaque itération k , on ait*

$$\|(\hat{X}^{k+1}, W^{k+1}) - (X^*, W^*)\|_r \leq \theta_r \|(\hat{X}^k, W^k) - (X^*, W^*)\|_r.$$

En outre, même dans le cas d'une résolution seulement approximative des problèmes internes, il existe un résultat de convergence de l'algorithme, issu de [Rockafellar et Wets, 1991, théorème 5.4].

Théorème 6.19. *On considère l'algorithme dans le cas convexe, sous les hypothèses 6.13, et on suppose qu'à chaque itération k , et pour tous les scénarios s , les sous-problèmes (6.4) sont résolus approximativement, de manière à satisfaire le critère*

$$\text{dist}(0, D_s^k) \leq (1 - \epsilon)^{k+1} \min(1, \|X^{k+1}(s) - \hat{X}^k(s)\|_2),$$

$$\text{avec : } D_s^k = \partial f_s^k(X^{k+1}(s)) + N_{C_s}(X^{k+1}(s)),$$

$$\text{et } f_s^k(x) = f_s(x) + \langle x, W^k(s) \rangle + \frac{r}{2} \|x - \hat{X}^k(s)\|_2^2.$$

Alors, les résultats de convergence des théorèmes 6.17 et 6.18 restent vrais.

L'article [Mulvey et Vladimirov, 1989a] constate ainsi que, lorsqu'on se trouve loin de l'optimum, on peut résoudre les sous-problèmes internes de manière moins précise. Par contre, le fait de prolonger l'imprécision augmente le nombre d'itérations requis pour converger.

L'article [Rockafellar et Wets, 1991] fournit également un résultat de convergence de l'algorithme dans le cas non convexe, que l'on n'a pas retranscrit ici.

6.6 Précédentes expérimentations numériques

La plupart des travaux autour de cet algorithme sont des expérimentations numériques aboutissant à des propositions d'heuristiques pour en améliorer la convergence.

6.6.1 Grande diversité des applications

Un certain nombre d'auteurs se sont intéressés à l'application du recouvrement progressif à des exemples industriels concrets, non restreints à des problématiques de gestion de production d'électricité, comme c'est le cas de [dos Santos et col., 2009].

Ainsi, l'algorithme a été expérimenté dans [Helgason et Wallace, 1991] sur un problème de gestion de la pêche, [Barruncho et col., 1999, Mulvey et Vladimirov, 1989b, Mulvey et Vladimirov, 1989a] présentent des tests effectués sur un problème de réseau, [Chun et Robinson, 1995] l'a mis à l'épreuve sur un problème de planification de force militaire, [Carvalho et col., 2005] l'a implémenté pour résoudre un problème de planification de transmission de puissance, [Fan et Liu, 2008] l'a appliqué sur un problème de protection de réseau de transports contre des catastrophes naturelles, et [Fulga, 2009] l'a testé sur un problème d'optimisation de portefeuille.

6.6.2 Importance du choix du paramètre de pénalisation

Au cours de leurs expérimentations numériques, la plupart des auteurs (par exemple, on peut citer les références [Abramson et de Silva, 1993, Berland et Haugen, 1996, Chun et Robinson, 1995, dos Santos *et col.*, 2009, Helgason et Wallace, 1991, Mulvey et Vladimirou, 1989a]) ont vérifié que le choix du paramètre de pénalisation r de l'algorithme était crucial puisque, pour certaines valeurs, l'algorithme ne convergait pas (ou bien trop lentement). Le facteur r doit en effet être choisi suffisamment grand pour garantir la convergence ainsi que la décroissance de l'« erreur primale-duale » (qui correspond à la différence en norme- r , d'une itération à l'autre, des variables primales et duales).

Ils ont également observé que de plus grandes valeurs de r étaient susceptibles d'accélérer la convergence. Cependant, si celles-ci induisent une convergence initiale plus rapide, les solutions obtenues sont sous-optimales si le paramètre de pénalisation est trop important : en effet, la contrainte pénalisée devient alors prépondérante dans les critères des sous-problèmes minimisés.

En revanche, le choix d'un faible r sera à l'origine d'une convergence plus progressive. Plus on choisit un grand paramètre de pénalisation, plus la valeur du critère obtenue après la convergence est éloignée de celle obtenue par une autre méthode⁸. Ainsi, pour un choix de r au delà d'un certain seuil, on observe une convergence prématurée de la méthode, c'est-à-dire que l'on obtient une solution implémentable et admissible, mais très loin d'être optimale.

Remarque : L'article [Berland et Haugen, 1996] révèle également que ce mauvais conditionnement apparaît presque soudainement lorsqu'on s'intéresse à l'évolution du nombre d'itérations nécessaires pour converger en fonction de la valeur choisie pour r . Ainsi, sur la courbe représentative de cette évolution, on observe qu'une augmentation de seulement 7 % du paramètre de pénalisation change le comportement de l'algorithme, qui passe d'une convergence en une dizaine d'itérations à une non convergence.

Dans l'article [Strip *et col.*, 2007], les auteurs s'intéressent à déterminer le lien entre les valeurs de r permettant une convergence rapide et les paramètres (coefficients du critère et contraintes) du problème à résoudre. Ils suggèrent qu'une bonne valeur du paramètre pourrait être de l'ordre des plus grands coefficients linéaires du critère.

La lecture des différents articles cités confirme ainsi l'importance du choix du paramètre de pénalisation pour que l'algorithme converge vers une valeur optimale. Le problème récurrent que se posent les utilisateurs de la méthode est alors de trouver un r adéquat, ce choix étant fortement conditionné par le problème résolu.

6.6.3 Résolution approximative des sous-problèmes associés aux scénarios

À chaque itération de l'algorithme, on doit résoudre, pour tous les scénarios considérés, un problème standard déterministe.

Les articles [Helgason et Wallace, 1991, Barro et Canestrelli, 2004] exploitent une résolution approchée par une méthode itérative de décomposition temporelle. Dans le premier, les auteurs utilisent une approche lagrangienne en relaxant les contraintes dynamiques (c'est-à-dire les contraintes qui couplent les variables dépendant de pas de temps distincts), et décomposent chaque problème par étape. Lorsqu'ils ont augmenté la précision requise à la résolution des sous-problèmes, ils n'ont pas observé de gain significatif : la résolution des sous-problèmes est devenue plus coûteuse, alors que le nombre d'itérations total de l'algorithme était à peine diminué. Ils observent également qu'une résolution exacte des sous-problèmes nécessite d'augmenter le facteur de pénalisation r . Ce comportement peut être justifié par le fait que la résolution exacte amplifie les oscillations des solutions

8. Par exemple il peut s'agir d'une résolution frontale.

des scénarios individuels, et que ces oscillations doivent être amorties par une pénalisation plus importante.

Par ailleurs, [Rockafellar et Wets, 1991] soulignent que, d'une itération à l'autre, un sous-problème associé à un scénario ne diffère que d'un terme linéaire, ce qui pourrait éventuellement être exploité pour réduire les temps de calculs inhérents aux résolutions successives.

6.6.4 Initialisation des variables primales

Dans l'article [dos Santos *et col.*, 2009], les auteurs s'intéressent à l'importance de l'initialisation des variables primales. Ils éprouvent ainsi quatre stratégies : une initialisation des variables primales à 0, une initialisation à partir des optima des sous-problèmes non pénalisés, et deux initialisations à partir des solutions de problèmes similaires sur le même arbre, mais dont les contraintes sont décalées de $\pm 10\%$ ⁹. Ils observent finalement que la version qui présente les meilleures performances est celle où l'on utilise les solutions indépendantes sur chaque sous-problème non pénalisé pour initialiser les variables primales.

L'article [Fan et Liu, 2008] suggère par ailleurs, pour initialiser les variables primales, de résoudre le problème entier sur l'arbre, en ne conservant que les contraintes dynamiques et de non-anticipativité¹⁰ ; le problème à résoudre initialement est important mais moins contraint, et permet une convergence en un nombre réduit d'itérations.

6.6.5 Comportement en fonction du type de problème

Les auteurs de [Mulvey et Vladimirov, 1989a, Chun et Robinson, 1995, Berland et Haugen, 1996] ont testé le recouvrement progressif pour des problèmes différents, et ont constaté que l'accroissement des scénarios n'augmentait pas le nombre d'itérations requis pour converger. En revanche, le nombre d'itérations paraît sensible à la variance des solutions des sous-problèmes. Cependant, le temps de calcul est assez peu impacté par le passage d'un problème linéaire à un problème non linéaire. En outre, l'intervalle des « bonnes valeurs » du paramètre de pénalisation semble d'autant plus étendu que le nombre de scénarios est faible.

Remarque : Par « bonnes valeurs » du paramètre, on entend celles pour lesquelles l'algorithme converge en assez peu d'itérations et fournit une solution qui n'est pas sous-optimale.

6.6.6 Comparaison avec d'autres méthodes d'optimisation stochastique

Dans [Mulvey et Vladimirov, 1989a], le recouvrement progressif est comparé à une méthode de simplexe ainsi qu'à une méthode de points intérieurs (qui résolvent dans les deux cas le problème frontalement sur l'arbre), pour un problème de grande taille, mais à seulement deux pas de temps. Le recouvrement progressif est, dans ce cadre, la méthode qui fournit les meilleurs résultats.

Les articles [Chun et Robinson, 1995, Zhao, 2005] comparent quant à eux l'algorithme à une relaxation lagrangienne de la contrainte de non-anticipativité (autorisant une décomposition scénario par scénario « directe »). Le problème dual associé est résolu dans le premier cas par une méthode, inspirée de [Schramm et Zowe, 1992], combinant la méthode des faisceaux à un procédé de régions de confiance. Dans le second cas, la relaxation est combinée à une méthode de barrière, de manière à résoudre les sous-problèmes (décomposés) résultants par une recherche linéaire suivant une direction de Newton¹¹. Les résultats présentés sont meilleurs que pour le recouvrement progressif en termes de vitesse de convergence, mais l'article ne décrit pas précisément la procédure de choix du paramètre de pénalisation.

9. Par exemple, pour un problème de gestion de production, il s'agit de décaler la demande.

10. Dans le cas d'un problème de gestion de production, l'équilibre offre-demande n'est plus imposé.

11. La méthode converge globalement en temps polynômial.

6.7 Améliorations heuristiques

6.7.1 Réglage dynamique du paramètre de pénalisation

6.7.1.1 Justification

Les auteurs de [Strip *et col.*, 2007] proposent une justification intuitive de la stratégie consistant à faire varier le paramètre de pénalisation au fur et à mesure des itérations, et également en fonction des variables auxquelles il est associé : si l'on considère une variable contrainte de prendre des valeurs assez faibles, mais associée à un prix dual assez élevé, un petit r nécessitera un grand nombre de pas dans l'espace dual pour atteindre l'optimum dual, alors qu'un grand r risque de provoquer un dépassement de cet optimum. Pour pallier cette difficulté, l'article suggère de choisir, pour chaque paquet de scénarios, un r adéquat correspondant au coefficient du terme linéaire associé aux variables de ce paquet divisé par l'écart maximal entre les valeurs des variables du paquet obtenues à l'itération précédente. Cette stratégie n'étant pas suffisamment performante en termes de temps de calcul, les auteurs proposent également de choisir, pour chaque paquet de scénario, un paramètre r multiple du coefficient du terme linéaire associé. Le nombre d'itérations s'en trouve diminué, mais reste tout de même plus important que celui où r est fixé, avec cependant une meilleure valeur finale du critère.

6.7.1.2 Paramétrages proposés

Pour éviter une convergence trop lente (paramètre trop faible), ou des piétinements de l'algorithme autour d'une solution sous-optimale (paramètre trop élevé), il est suggéré dans les articles [Mulvey et Vladimirov, 1989a, Carvalho *et col.*, 2005] d'augmenter graduellement r , sans dépasser une certaine limite, et à partir d'une valeur initiale assez faible. Le premier propose une règle de la forme

$$r^k = (\lambda r^{k-1})^\mu,$$

tandis que dans le deuxième est suggérée la règle suivante :

$$r^k = \frac{1}{\alpha + \beta^k}.$$

Ces règles nécessitent cependant un réglage préalable convenable des paramètres associés.

Une autre stratégie de réglage dynamique de r , présentée dans [Mulvey et Vladimirov, 1989a], consiste à diminuer brutalement le paramètre de pénalisation une fois que l'on se trouve suffisamment près de l'espace admissible. Cette manœuvre se justifie par le fait qu'une approche de relaxation lagrangienne simple suffit à générer les valeurs optimales primales si les optima duaux sont connus, ce qui est le cas lorsque la non-anticipativité est quasiment vérifiée.

L'article [Mulvey et Vladimirov, 1989a] propose également de choisir des paramètres initialement différents pour la pénalisation et la mise à jour des variables duales, avec des ajustements graduels au fur et à mesure des itérations permettant à ces paramètres de converger vers une valeur commune au bout d'un nombre fini d'itérations. Cependant, les bénéfices obtenus grâce à cette stratégie ne sont pas manifestes.

Mulvey et Vladimirov suggèrent en outre d'utiliser des paramètres de pénalisation distincts pour les contraintes de non-anticipativité, de manière à n'ajuster, à chaque itération, que les paramètres des contraintes pour lesquelles on constate le plus de violations.

6.7.2 Initialisation des variables duales

L'article [Mulvey et Vladimirov, 1989a] évoque une initialisation autre que 0 (mais tout de même implémentable) pour les variables duales. Celle-ci serait susceptible d'accélérer la convergence ; cependant les auteurs admettent une difficulté certaine à estimer une telle valeur.

6.7.3 Fixation anticipée de variables

Pour accélérer la convergence, l'article [Strip *et col.*, 2007] s'intéresse aux variables atteignant leurs valeurs optimales dès les premières itérations de l'algorithme. Ainsi, un paramètre de retard μ ($\in \mathbb{N}$) est introduit, correspondant au nombre d'étapes à partir duquel on fixe les variables stables depuis $\mu * N_S$ itérations. L'article propose également un procédé similaire pour détecter les comportements cycliques. Cette stratégie accélère la convergence, avec néanmoins un nombre d'itérations qui augmente avec la valeur du paramètre de retard, alors même que la qualité des solutions obtenues nécessite de choisir ce paramètre suffisamment grand.

6.7.4 Parallélisation et gestion des processeurs

Dans le cadre de l'application du recouvrement progressif à un problème industriel, comme celle que nous proposons à la partie IV, il est naturel d'envisager une parallélisation, à chaque itération, des résolutions des problèmes internes associés aux différents scénarios, en tirant partie de leur indépendance. L'article [Sommerwell, 1998] s'attache à optimiser la parallélisation de l'algorithme. Il s'est également intéressé à une extension de la parallélisation consistant à ne pas résoudre tous les sous-problèmes à chaque itération. Nous présentons ici les différentes approches qu'il propose, car il serait intéressant d'en utiliser certaines dans le cadre de l'implémentation de l'algorithme décrite dans la partie IV.

La désynchronisation : le nombre de sous-problèmes envoyés aux préprocesseurs n'est pas fixe ; à chaque scénario résolu, un autre est immédiatement présenté, ce qui permet d'éviter les temps d'attente superflus. Cette approche accélère la convergence (en termes de temps CPU), et fournit exactement les mêmes résultats qu'une approche classique.

La méthode cyclique naïve : l'utilisateur spécifie le nombre de scénarios à optimiser à chaque itération, et une permutation circulaire est effectuée pour déterminer, à chaque itération, quels seront les sous-problèmes à résoudre. L'auteur constate numériquement que cette méthode converge à condition de résoudre au moins la moitié des scénarios à chaque itération.

La méthode cyclique des scénarios moins convergents : un nombre de sous-problèmes à résoudre à chaque itération est également fixé en amont, mais le choix de ceux qui seront effectivement résolus repose sur une mesure de convergence (qui se base sur le critère d'arrêt de l'algorithme) calculée à l'issue de chaque itération. La convergence qui en résulte est plus rapide ; la meilleure vitesse est atteinte lorsque environ la moitié des scénarios sont optimisés à chaque itération. Cette méthode peut également converger si moins de la moitié des sous-problèmes sont résolus à chaque itération.

La méthode du nœud moins convergent : seuls les scénarios passant par le nœud le moins convergent (toujours selon une mesure, utilisant le résultat de l'itération précédente) sont résolus. Cependant, cette approche ne semble pas converger pour les problèmes de taille importante.

La méthode des scénarios non convergents : seuls sont résolus les scénarios dont la mesure de convergence est plus grande qu'une tolérance prédéfinie ; le nombre de sous-problèmes évolue donc au fur et à mesure des itérations. En fonction des problèmes posés, la méthode s'avère plus ou moins efficace. Cependant, lorsqu'elle est combinée à une désynchronisation, on constate un gain en temps de calcul, ainsi qu'en communications entre processeurs.

La méthode des nœuds non convergents : les scénarios optimisés sont ceux qui passent par les nœuds (en nombre variable) dont on a estimé une mesure de convergence inférieure à un seuil déterminé. L'efficacité de cette méthode dépend des problèmes considérés.

6.7.5 Extension de la notion de scénario

L'article [Berland et Haugen, 1996] présente un algorithme hybride qui exploite le recouvrement progressif en étendant la notion de scénarios à des sous-arbres, et qui résout les sous-problèmes associés par un algorithme de programmation dynamique stochastique. Plus précisément, en général, un scénario est défini comme un chemin depuis la racine de l'arbre jusqu'à l'une de ses feuilles (contenant une réalisation de tous les événements aléatoires). Dans leur article, Berland et Haugen ne restreignent cependant pas un scénario à un seul chemin ; ils l'autorisent à contenir plusieurs feuilles de l'arbre. Chaque scénario - au sens où ils l'entendent - est ainsi associé à un sous-problème d'optimisation stochastique. Cette stratégie permet d'étudier diverses structures de scénarios. En outre, dans le cas d'un algorithme parallélisé, le choix du nombre de scénarios peut être défini en fonction du nombre de processeurs disponibles.

Lorsque cette méthode est comparée à une programmation dynamique stochastique sur un problème dont l'espace d'état est assez limité (de manière à pouvoir mettre en œuvre la programmation dynamique stochastique), elle ne fournit pas de meilleurs résultats, ce que la petite taille du problème parvient aisément à expliquer.

6.7.6 Perturbation des poids des scénarios

Les poids p_s des scénarios peuvent être définis en amont de la résolution, ou bien être modulables, de manière à observer l'impact des différents scénarios sur la stratégie finalement obtenue. L'article [Wets, 1989] s'intéresse à l'étude de la sensibilité d'une solution réalisable par rapport à des modifications des probabilités d'occurrence des scénarios. Il fournit une procédure permettant, sans réitérer l'intégralité de l'algorithme, de générer une solution réalisable pour un certain choix de poids $(p'_s)_{s \in \mathcal{S}}$ à partir de la solution calculée pour un choix différent de poids $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$.

6.8 Extensions

6.8.1 Réglage adaptatif des paramètres

L'algorithme SALA, détaillé au paragraphe 4.6.3, est un cas particulier d'application de la méthode du recouvrement progressif. L'article [Benchakroun et col., 2000] étudie la possibilité d'effectuer un réglage adaptatif du paramètre de pénalisation. Plus précisément, les auteurs ont eux aussi constaté les comportements inverses des suites primale et duale en fonction des valeurs choisies pour ce paramètre. Ils ont établi, en supposant l'opérateur proximal T_r associé à l'algorithme (tel que celui défini à la section 6.4.2) fortement monotone de rayon ρ et continûment lipschitzien de constante L , une convergence linéaire du couple primal-dual, ainsi que des taux de convergence linéaire primale et duale distincts. Ces taux dépendent des constantes L et ρ , ainsi que du paramètre r . Ils ont alors maximisé (sur l'ensemble des $r > 0$) chacun de ces taux, et en ont obtenu une valeur optimale. Ils ont constaté que les taux optimaux primal et dual étaient identiques, mais pour des valeurs distinctes du facteur de pénalisation r . C'est la minimisation, en fonction de r , du maximum de ces deux taux de convergence qui fournit le facteur optimal : $r^* = 1/\sqrt{\rho L}$.

Cependant, les constantes associées aux propriétés de Lipschitz et de forte monotonie de T_r restent à déterminer. L'article suggère alors d'observer les vitesses de convergence des suites primale et duale, puis d'augmenter ou de diminuer le paramètre r en fonction de la suite la plus rapide. Ainsi, lorsque la suite duale évolue plus rapidement, on accroît le paramètre et, dans la situation inverse, on le réduit. Les résultats numériques présentés dans [Benchakroun et col., 2000] suivant cette heuristique sont prometteurs.

6.8.2 Application à des problèmes non séparables par scénarios

L'article [Robinson, 1991] montre comment étendre l'algorithme du recouvrement progressif à des problèmes convexes dont le critère n'est pas séparable par scénarios¹². L'auteur se base, pour cela, sur l'interprétation de la méthode comme une méthode d'inverses partiels (étudiés dans [Spingarn, 1983]); il obtient des résultats de convergence analogues à ceux du recouvrement progressif, ainsi que des résultats numériques probants.

6.8.3 Application à des problèmes non convexes

Dans le cadre de problèmes non convexes, l'article [Dentcheva et Römisich, 2004] confronte l'algorithme du recouvrement progressif à deux autres stratégies de décomposition, et compare les sauts de dualité obtenus. Ainsi, Dentcheva et Römisich s'attachent à décomposer un problème non seulement par scénarios, mais également par nœuds (les contraintes dualisées sont, à chaque nœud, celles qui couplent les périodes temporelles), ou encore géographiquement (les contraintes dualisées sont alors celles qui couplent les différents types de variables du problème¹³).

L'article présente un résultat selon lequel la décomposition par scénarios fournit une meilleure borne inférieure du coût optimal que la décomposition nodale, c'est-à-dire un saut de dualité plus faible¹⁴. En outre, il y est également démontré que la décomposition géographique fournit une meilleure borne inférieure du coût optimal que l'une ou l'autre des décompositions par scénarios et nodale si, et seulement si, le problème s'avère moins affecté par une relaxation de ses contraintes géographiques, selon une mesure de sensibilité - relativement difficile à calculer - consistant à comparer les valeurs optimales des problèmes duaux convexifiés.

6.8.4 Combinaison à des heuristiques

Un certain nombre d'auteurs se sont penchés sur l'application de l'algorithme du recouvrement progressif à des problèmes comportant non plus uniquement des variables continues, mais également des nombres entiers.

Ainsi, l'article [Løkketangen et Woodruff, 1996] propose d'appliquer le recouvrement progressif à un tel problème, avec une résolution des sous-problèmes par une méthode de recherche tabou. Les articles [Haugen *et col.*, 2001, Crainic *et col.*, 2011, Hvattum *et col.*, 2009, Watson et Woodruff, 2011] s'inspirent également de l'algorithme du recouvrement progressif pour suggérer des heuristiques de résolution de problèmes mixtes.

12. Ce cas de figure peut par exemple se produire si l'on souhaite minimiser la variance d'un portefeuille atteignant un résultat spécifique.

13. Il peut, par exemple, s'agir de la contrainte d'équilibre offre-demande, qui couple les différentes unités de production entre elles.

14. Ce résultat suppose la non-vacuité de l'intérieur relatif de l'espace admissible.

Chapitre 7

Études relatives à la convergence du recouvrement progressif

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'étude de questions liées à la convergence de l'algorithme du recouvrement progressif.

Nous nous intéressons dans un premier temps au comportement de l'algorithme lorsqu'on fait varier itérativement son paramètre de pénalisation r . Notre motivation initiale était de fournir une règle de paramétrage adaptative pour r , de manière à assurer une convergence de l'algorithme en un nombre raisonnable d'itérations quel que soit le problème à résoudre. Nous avons alors constaté que la convergence de l'algorithme avec un r variable n'était pas assurée. Nous présentons un contre-exemple mettant en évidence ce phénomène dans la première partie de ce chapitre.

Nous produisons dans un second temps la démonstration d'un résultat, également développé dans l'article en préparation [Barty *et col.*, 2012], qui a trait à la convergence des variables duales associées aux contraintes autres que celle de non-anticipativité. Ces variables duales ne sont pas gérées directement par l'algorithme du recouvrement progressif; ainsi, l'intérêt de la démonstration de leur convergence n'est pas immédiat. Cependant, en pratique, et particulièrement dans le cadre de l'application du recouvrement progressif à un problème de gestion de production (comme cela est présenté à la partie IV de ce manuscrit), l'utilité de ce résultat est d'assurer que l'on puisse, à la convergence, calculer les coûts marginaux de l'électricité, c'est-à-dire les variables duales associées à la contrainte d'équilibre offre-demande. L'importance pour EDF de la connaissance de ces coûts marginaux a en effet déjà été soulignée au chapitre 2 de ce manuscrit.

7.1 Non-convergence à paramètre variable

7.1.1 Enjeux et origine de l'étude

Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent, l'une des difficultés liées à l'utilisation de l'algorithme du recouvrement progressif consiste à régler le facteur de pénalisation r , qui apparaît devant le terme quadratique des sous-problèmes résolus à chaque itération, et qui intervient également dans la mise à jour des multiplicateurs. En outre, l'interprétation de l'algorithme en termes de recherche de points-selles, telle que nous l'avons présentée au paragraphe 6.4.2, a permis de mettre en évidence que le choix de ce paramètre est délicat du fait des comportements opposés des itérés primaux et duaux en fonction de l'ordre de grandeur de r . Ainsi, si r est fixé trop petit ou trop grand, l'algorithme ne converge pratiquement pas; un r trop faible ralentit l'évolution des itérés duaux, tandis qu'un r trop élevé freine celle de la suite primale. De plus, s'il existe un intervalle de choix possibles pour r à l'intérieur duquel une convergence rapide est assurée, les bornes de cet intervalle dépendent du problème à résoudre, et nous n'avons pas été en mesure d'exprimer

explicitement cette dépendance en fonction d'éléments aisément accessibles numériquement.

Un tel comportement nous a incités à réfléchir à une éventuelle adaptation du paramètre au cours des itérations de l'algorithme. Notre dessein était ainsi de proposer, dans le cas quadratique convexe, une heuristique permettant de déterminer itérativement un paramètre de pénalisation adapté au problème résolu. Cependant, le résultat de convergence fourni dans [Rockafellar et Wets, 1991] - rappelé au théorème 6.18 - a été établi dans le cas d'un paramètre de pénalisation constant lors de l'exécution de l'algorithme. Nous nous sommes alors interrogés sur la latitude que nous avons à faire évoluer r au cours des itérations, et avons pour cela étudié le comportement de l'algorithme avec un paramètre variable. Nous avons ainsi abouti à un contre-exemple montrant que l'algorithme du recouvrement progressif peut diverger lorsque r^k est mis à jour à chaque itération k selon la règle

$$r^{k+1} = \frac{1}{r^k} > 0. \quad (7.1)$$

7.1.2 Contre-exemple

7.1.2.1 Description

On considère un problème formulé sur un arbre d'une structure assez simple. Plus précisément, il s'agit d'un problème à deux scénarios équiprobables - chacun de probabilité d'occurrence $1/2$ - avec un nœud par scénario, une variable par nœud ($x_1 \in \mathbb{R}$ pour le premier scénario, $x_2 \in \mathbb{R}$ pour le second), aucune contrainte autre que celle de non-anticipativité ($\mathcal{C} = \emptyset$), et des fonctions coûts associées aux scénarios de la forme suivante :

$$f_1(x_1) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(x_2) = x_2^2. \quad (7.2)$$

On suppose les deux nœuds confondus dans l'arbre de scénario ; ainsi les projections orthogonales sur \mathcal{N} et \mathcal{N}^\perp s'expriment, pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, de la manière suivante :

$$Jx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Kx = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Le problème (6.2) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} x_2^2, \\ x_1 = x_2. \end{cases}$$

Il a $(0, 0)$ pour solution unique.

7.1.2.2 Comportement de l'algorithme

On applique à ce problème l'algorithme du recouvrement progressif, avec un multiplicateur initial W^0 appartenant à l'espace $\mathcal{M} = \mathcal{N}^\perp$. De cette manière, comme on l'a vu au chapitre précédent, tous les itérés duaux $W^k = (\lambda^k, \mu^k) \in \mathbb{R}^2$ resteront dans cet ensemble et vérifieront

$$\lambda^k = -\mu^k. \quad (7.3)$$

Les étapes de l'algorithme s'écrivent alors, à l'itération $k \in \mathbb{N}$:

1. résolution du sous-problème associé au premier scénario :

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &:= \arg \min_{x_1 \in \mathbb{R}} x_1 \lambda^k + \frac{r^k}{2} \left(x_1 - \frac{x_1^k + x_2^k}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{\lambda^k}{r^k} + \frac{x_1^k + x_2^k}{2}; \end{aligned} \quad (7.4)$$

2. résolution du sous-problème associé au second scénario :

$$\begin{aligned} x_2^{k+1} &:= \arg \min_{x_2 \in \mathbb{R}} x_2^2 + x_2 \mu^k + \frac{r^k}{2} \left(x_2 - \frac{x_1^k + x_2^k}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\lambda^k}{r^k + 2} + \frac{r^k}{r^k + 2} \frac{x_1^k + x_2^k}{2} \quad [(7.3)]; \end{aligned} \quad (7.5)$$

3. mise à jour des multiplicateurs :

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} &:= \lambda^k + \frac{r^k}{2} (x_1^{k+1} - x_2^{k+1}) \\ &= x_2^{k+1} \quad [(7.5)]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Ainsi, si l'on applique la règle (7.1) et si l'on écrit (7.4) et (7.5) à l'itération $k + 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} x_1^{k+2} &= -r^k \lambda^{k+1} + \frac{x_1^{k+1} + x_2^{k+1}}{2} \\ &= \frac{x_1^{k+1} + (1 - 2r^k)x_2^{k+1}}{2} \quad [(7.6)] \\ &= \frac{-r^{k^2} + r^k + 1}{2(r^k + 2)} x_1^k + \frac{-r^{k^2} + r^k - 1}{2r^k} x_2^k \quad [(7.4) \text{ et } (7.5)] \end{aligned} \quad (7.7)$$

et

$$\begin{aligned} x_2^{k+2} &= \frac{r^k}{1 + 2r^k} \lambda^{k+1} + \frac{x_1^{k+1} + x_2^{k+1}}{2(1 + 2r^k)} \\ &= \frac{x_1^{k+1}}{2(1 + 2r^k)} + \frac{x_2^{k+1}}{2} \quad [(7.6)] \\ &= \frac{r^{k^2} + r^k + 1}{2(1 + 2r^k)(2 + r^k)} x_1^k + \frac{r^{k^2} + r^k - 1}{2r^k(1 + 2r^k)} x_2^k \quad [(7.4) \text{ et } (7.5)]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

On cherche un r^k pour lequel l'algorithme peut cycler en quatre itérations, et plus précisément pour lequel il existe un vecteur x tel que $x^{k+2} = -x^k$ vérifie les équations (7.7) et (7.8). Cela conduit à la recherche d'un $r > 0$ tel que le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{-r^2 + 3r + 5}{r + 2} x_1 + \frac{-r^2 + r - 1}{r} x_2 = 0 \end{cases} \quad (7.9a)$$

$$\begin{cases} \frac{r^2 + r + 1}{(r + 2)(2r + 1)} x_1 + \frac{5r^2 + 3r - 1}{r(2r + 1)} x_2 = 0 \end{cases} \quad (7.9b)$$

ait une solution (x_1, x_2) non nulle, ce qui est le cas si, et seulement si, le déterminant de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} \frac{-r^2 + 3r + 5}{r + 2} & \frac{-r^2 + r - 1}{r} \\ \frac{r^2 + r + 1}{(r + 2)(2r + 1)} & \frac{5r^2 + 3r - 1}{r(2r + 1)} \end{pmatrix}$$

s'annule pour un $r > 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe un $r > 0$ tel que :

$$\frac{4}{r(r + 2)(2r + 1)} (-r^4 + 3r^3 + 9r^2 + 3r - 1) = 0. \quad (7.10)$$

Or l'équation (7.10) a deux solutions strictement positives inverses l'une de l'autre :

$$\bar{r}_1 := \frac{3 + \sqrt{53} - \sqrt{46 + 6\sqrt{53}}}{4} \approx 0.2025 \quad \text{et} \quad \bar{r}_2 := \frac{3 + \sqrt{53} + \sqrt{46 + 6\sqrt{53}}}{4} \approx 4.9375.$$

Il suffit alors d'initialiser le recouvrement progressif avec r^0 égal à \bar{r}_1 ou \bar{r}_2 pour que, si r^k évolue suivant la règle (7.1), l'algorithme puisse cycler toutes les quatre itérations, et ainsi diverger.

Nous avons ainsi mis au jour un exemple de divergence de l'algorithme du recouvrement progressif avec un paramètre variable.

7.1.2.3 Illustration

Les figures suivantes illustrent le comportement du recouvrement progressif appliqué au contre-exemple décrit ci-dessus. Sur ces figures, nous avons considéré la vision proximale primale-duale de l'algorithme du recouvrement progressif. Plus précisément, si les x^k - dont les composantes sont solutions des sous-problèmes internes associés au scénarios - sont les produits effectivement calculés par l'algorithme, ils demeurent des variables auxiliaires. Ainsi, à chaque itération, l'algorithme met à jour un couple $(v^k, w^k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\perp$, où v^k correspond à la projection implémentable Jx^k de l'itéré x^k , et où w^k est l'itéré dual (λ^k, μ^k) . Or, étant donné les expressions de \mathcal{N} et $\mathcal{M} = \mathcal{N}^\perp$:

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 = x_2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}^\perp = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 = -x_2\}, \quad (7.11)$$

ces itérations dans \mathbb{R}^4 peuvent se ramener à des itérations dans \mathbb{R}^2 (puisque $v_1^k = v_2^k$ et $w_1^k = -w_2^k$).

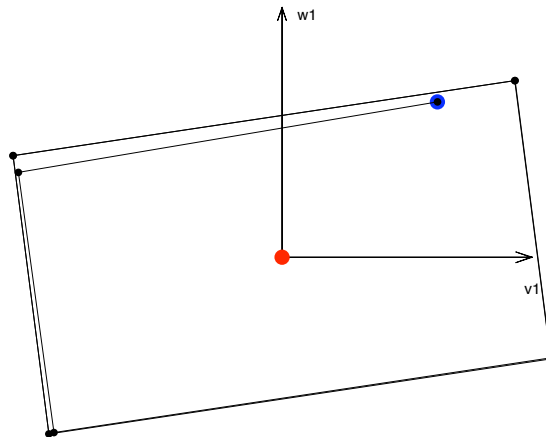
Sur chaque figure, on trace alors l'évolution du couple primal-dual, ramené dans \mathbb{R}^2 ,

$$(v_1^k, w_1^k) = (v_2^k, -w_2^k) = \left(\frac{x_1^k + x_2^k}{2}, \lambda^k \right).$$

L'itéré initial est en bleu, les itérés suivants en noir, et la solution $(0, 0)$ en rouge et au centre.

Sur la figure 7.1, on a choisi $r^0 = \bar{r}_1$, et on a fait varier r^k suivant la règle (7.1) ; on y constate le comportement cyclique asymptotique de l'algorithme, même si l'itéré initial n'appartient pas au noyau de A . Cela semble indiquer qu'il est possible de démontrer que, pour un itéré initial quelconque, il suffit de choisir $r^0 = \bar{r}_1$ et de faire varier r^k suivant la règle (7.1) pour que l'algorithme cycle asymptotiquement. Nous n'avons cependant pas cherché plus avant dans cette direction, le contre-exemple nous ayant semblé déjà révélateur quant au comportement éventuellement divergent de l'algorithme avec un paramètre variable.

FIGURE 7.1 – Chemin des itérés du recouvrement progressif, avec r variable faisant cycler l'algorithme



Sur la figure 7.2, on a choisi $r^0 = \bar{r}_1 + 0.01$ et on a également fait varier r^k suivant la règle (7.1) ; on y observe la convergence de l'algorithme, même si celle-ci semble relativement lente.

Sur la figure 7.3, on a choisi $r^0 = \bar{r}_1 - 0.01$, avec r^k évoluant toujours suivant (7.1) ; on y observe alors que l'algorithme diverge.

7.1. NON-CONVERGENCE À PARAMÈTRE VARIABLE

FIGURE 7.2 – Chemin des itérés du recouvrement progressif, avec r variable faisant converger l'algorithme

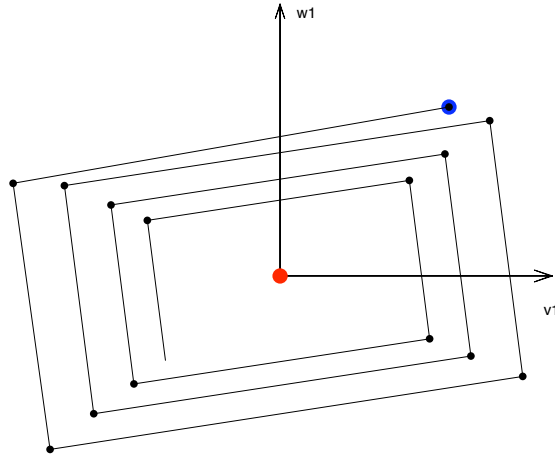
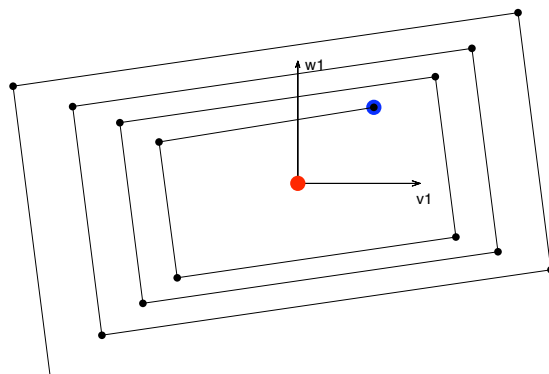
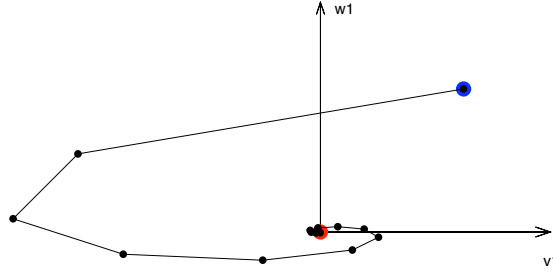


FIGURE 7.3 – Chemin des itérés du recouvrement progressif, avec r variable faisant diverger l'algorithme



Sur la figure 7.4, on a fixé $r^k = \bar{r}_1$ à toutes les itérations, et on vérifie que l'algorithme converge en quelques itérations vers la solution $(0, 0)$.

FIGURE 7.4 – Chemin des itérés du recouvrement progressif, avec r constant faisant converger l'algorithme



7.1.2.4 Origine du contre-exemple

Pour obtenir le contre-exemple précédemment décrit, nous avons travaillé sur l'interprétation de l'algorithme en termes de recherche de points-selles.

Nous avons commencé par chercher un contre-exemple pour un algorithme similaire à celui du recouvrement progressif. Il s'agit d'une version qui ne s'applique pas nécessairement à des problèmes sur des arbres de scénarios de la forme (6.2), contrairement au recouvrement progressif. Plus précisément, nous avons considéré le lagrangien convexe-concave d'un problème d'optimisation trivial

$$\inf_v \{0, v = 0\}.$$

Ce lagrangien s'écrit, pour tout couple $(v, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\ell(v, \lambda) = \lambda v,$$

et l'opérateur monotone T correspondant à son sous-différentiel convexe-concave (au sens de la formule (6.21)) est défini par la matrice

$$T := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons tout d'abord montré qu'il était possible de trouver un $r^1 > 0$ tel que l'algorithme proximal consistant à calculer itérativement un vecteur $z^{k+1} = (Id + M^k T)^{-1} z^k$, avec M^k une matrice définie de la manière suivante :

$$M^k := \begin{pmatrix} \frac{1}{r^k} & 0 \\ 0 & r^k \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

et avec r^k suivant la règle $r^{k+1} = 1/r^k$, cycle en 4 itérations. On rappelle que le calcul d'un $\tilde{z}^{k+1} = (Id + T)^{-1} \tilde{z}^k$ correspond à une itération de l'algorithme proximal associé à l'opérateur T avec paramètre unité.

Nous nous sommes inspirés de ce cas particulier pour construire, en procédant par essais-erreurs, le contre-exemple décrit au paragraphe 7.1.2. Ainsi, en utilisant les expressions (7.11) de \mathcal{N} et \mathcal{N}^\perp ,

on peut aisément calculer le lagrangien L défini au paragraphe 6.4.2; pour tout $(v, w) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\perp$,

$$\begin{aligned} L(v, w) &:= \inf_{u \in \mathcal{N}^\perp} (F(u + v) + \delta_{\mathcal{C}}(u + v) + \langle u | w \rangle) \\ &= \inf_{u \in \mathcal{N}^\perp} \left(\frac{1}{2} ((u_2 + v_2)^2 + u_1 w_1 + u_2 w_2) \right) \quad [(7.2) \text{ et } \mathcal{C} = \mathbb{R}^2] \\ &= \inf_{u_1 \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} (-u_1 + v_1)^2 + u_1 w_1 \right) \quad [(7.11) \text{ avec } v \in \mathcal{N} \text{ et } w \in \mathcal{N}^\perp] \\ &= v_1 w_1 - \frac{1}{2} w_1^2. \end{aligned}$$

Il est alors également possible de prouver par l'interprétation en termes de recherche de points-selles de l'algorithme que le recouvrement progressif peut être cyclique dans ce cas. Nous avons cependant préféré mettre au jour la démonstration utilisant la vision la plus connue de cet algorithme, car elle utilise des outils plus classiques et ne nécessite pas de connaissance a priori des notions de point-selle et d'algorithme proximal.

7.1.3 Commentaires

L'existence d'un contre-exemple montrant que l'on peut avoir divergence du recouvrement progressif avec un paramètre variable peut sembler contre-intuitive.

En effet, comme on l'a vu au paragraphe 4.5.2, [Rockafellar, 1976b, théorème 1] montre que l'algorithme proximal converge avec un paramètre variable, à condition que celui-ci soit « uniformément positif » (c'est-à-dire minoré par une constante strictement positive). Cependant, ce résultat a été démontré dans le cas où un itéré z^{k+1} est calculé à partir du précédent z^k suivant la règle

$$z^{k+1} = (Id + r^k T)^{-1} z^k.$$

Il reste également valable dans le cas où le paramètre r^k est remplacé par des matrices bornées d'inverses bornés, à condition que l'opérateur T coïncide avec le sous-gradient d'une fonction f convexe. Cependant, si celui-ci correspond seulement au sous-différentiel convexe-concave d'une fonction convexe-concave, le contre-exemple développé ci-dessus montre que l'on n'a pas nécessairement convergence de l'algorithme.

En outre, lorsque l'opérateur T correspond au gradient d'une fonction convexe différentiable f , on peut déceler une analogie entre l'algorithme proximal associé à l'opérateur T et un algorithme de quasi-Newton avec recherche linéaire. En effet, une telle méthode calcule, à chaque itération, un point $x^{k+1} = (Id - \alpha^k M^k T)(x^k)$, avec α^k un pas positif déterminé par recherche linéaire, et M^k une matrice symétrique (en général définie positive). Sous certaines conditions de différentiabilité de f et de détermination du pas α^k , il suffit de supposer les matrices M^k et M^{k-1} bornées pour que cet algorithme converge. Or, dans le cas où M^k est définie par (7.12), et où r^k évolue selon la règle (7.1), il suffit de choisir r^1 dans \mathbb{R}_+^* , pour que M^k et M^{k-1} restent bornées.

En dépit de ces considérations qui semblaient présager d'une convergence de l'algorithme avec r variable, nous avons obtenu un contre-exemple à la convergence du recouvrement progressif avec un paramètre de pénalisation modifié à chaque itération (mais restant dans un compact de $]0, +\infty[$).

7.2 Convergence des multiplicateurs associés aux contraintes non dualisées

Nous nous intéressons à présent à la convergence des multiplicateurs associés aux contraintes non dualisées lors de l'application de l'algorithme du recouvrement progressif.

Pour montrer ce résultat de convergence, nous n'avons pas effectué d'hypothèse particulière de décomposabilité temporelle ou nodale sur le critère ni les contraintes. Ainsi, le cadre de l'étude n'est pas restreint à des contraintes d'égalité de la forme de celle d'équilibre offre-demande du problème de gestion de production d'électricité ; on peut donc appliquer le résultat obtenu à d'autres types de contraintes, comme par exemple celles exprimant la dynamique du système.

La preuve de ce résultat de convergence nécessite en outre d'établir le lien entre les contraintes associées à chaque scénario (sur le peigne), et celles qui sont définies sur l'arbre.

7.2.1 Deux formulations du problème

7.2.1.1 Formulation sur le peigne

On formule ici le problème sur l'ensemble des scénarios séparément, c'est-à-dire sur un peigne (sur la figure 6.1, la partie droite représente le peigne associé à l'arbre situé à gauche). Une telle formulation, due à [Rockafellar et Wets, 1991], est avantageuse car elle est adaptée à une décomposition du problème scénario par scénario.

Nous faisons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 7.1.

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}, \quad x_{s,t} \in \mathbb{R}^m,$$

c'est-à-dire que pour chaque scénario et chaque pas de temps, le nombre m de variables « physiques » du problème est identique.

Remarque : Cette hypothèse n'est cependant pas restrictive car, dans le cas contraire, il suffirait de définir la dimension maximale des vecteurs $x_{s,t}$, et de l'imposer comme dimension de tous ces vecteurs (quitte à introduire des variables superflues). En outre, cette hypothèse semble assez naturelle, si l'on considère que l'ensemble de toutes les variables du peigne décrit l'évolution au cours du temps d'un certain nombre (m) de paramètres.

On se place dans le même cadre qu'au chapitre 6, c'est-à-dire que l'on souhaite résoudre un problème sur un arbre de scénarios de la forme

$$\begin{cases} \inf_{x \in \mathcal{C}} F(x), \\ Kx = 0, \end{cases} \quad (7.13)$$

où le critère F s'écrit

$$F(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s f_s(x_s), \quad (7.14)$$

avec $x_s \in \mathbb{R}^{mT}$, $f_s : \mathbb{R}^{mT} \rightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que T et $N_{\mathcal{S}}$ désignent les nombres respectifs de pas de temps et de scénarios de l'arbre considéré. On a alors

$$\mathcal{S} = \{1, \dots, N_{\mathcal{S}}\}$$

et on note

$$N_P := mTN_{\mathcal{S}}$$

le nombre total de variables sur le peigne.

Hypothèse 7.2. On suppose que l'ensemble des contraintes \mathcal{C} s'écrit comme un produit cartésien sur les scénarios :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_{N_{\mathcal{S}}}.$$

7.2.1.2 Formulation sur l'arbre

Si l'expression du problème sur le peigne est adaptée à la décomposition par scénarios, celle que visualise l'utilisateur qui définit un problème d'optimisation stochastique sur un arbre de scénarios est une formulation sur l'arbre lui-même. Il est alors essentiel d'avoir également une formulation équivalente du problème sur l'arbre, et non plus sur le peigne, et d'établir les liens entre ces deux formulations. En outre, nous montrons par la suite que l'on peut retrouver les multiplicateurs associés à une contrainte sur l'arbre à partir de ceux associés aux contraintes correspondantes sur le peigne.

Convention 7.3. En général, on distinguera par une barre supérieure « $\bar{\cdot}$ » les variables et données associées au problème défini sur l'arbre.

On note N le nombre de nœuds de l'arbre, et

$$\bar{N}_A := Nm$$

le nombre de variables du problème formulé sur l'arbre. On souhaite réécrire le problème (7.13) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \inf \bar{F}(\bar{x}), \\ \bar{c}_{\bar{E}}(\bar{x}) = 0, \\ \bar{c}_{\bar{I}}(\bar{x}) \leq 0, \end{cases} \quad (7.15)$$

avec \bar{E} et \bar{I} les ensembles disjoints d'indices formant une partition de $\{1, \dots, \bar{n}\}$, et associés respectivement aux contraintes d'égalité et d'inégalité de \bar{C} ,

$$\bar{F} : \mathbb{R}^{\bar{N}_A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{c}_{\bar{E}} : \mathbb{R}^{\bar{N}_A} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{n}_E}, \quad \bar{c}_{\bar{I}} : \mathbb{R}^{\bar{N}_A} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{n}_I}, \quad \bar{c} := (\bar{c}_{\bar{E}}, \bar{c}_{\bar{I}}).$$

On définit l'ensemble des contrainte \bar{C} de (7.15) de la manière suivante :

$$\bar{x} \in \bar{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{c}_{\bar{E}}(\bar{x}) = 0, \\ \bar{c}_{\bar{I}}(\bar{x}) \leq 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

7.2.2 D'une formulation à l'autre

7.2.2.1 Transformation des variables

Puisque les formulations (7.15) et (7.13) se rapportent à un même problème, et que l'on s'intéresse au lien entre leurs multiplicateurs respectifs, on cherche à présent à exprimer précisément les applications qui permettent de passer de l'une à l'autre. Pour cela, on assoit les définitions suivantes.

Définition 7.4. On introduit la multifonction $\mathfrak{S}_N : \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathcal{S}$ qui, à un nœud i , associe l'ensemble des scénarios passant par ce nœud. On emploiera également l'expression selon laquelle un nœud i appartient à un scénario s dans le cas où $s \in \mathfrak{S}_N(i)$.

Définition 7.5. On définit l'application $\tau : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, T\}$, qui à un nœud i associe le pas de temps correspondant à ce nœud sur l'arbre.

On illustre ces définitions à l'aide de la figure 6.1. Ainsi, on a par exemple :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_N(2) &= \{1, 2, 3\}, & \mathfrak{S}_N(3) &= \{1\}, & \mathfrak{S}_N(4) &= \{2, 3\}, \\ \tau(2) &= 2, & \tau(3) &= 3, & \tau(4) &= 3. \end{aligned}$$

On peut à présent spécifier les opérateurs permettant de passer d'une variable définie sur l'arbre à une variable définie sur le peigne, et inversement. Pour cela on rappelle que, d'après les définitions 3.4

et 3.5, respectivement relatives à un arbre de scénarios et à un nœud de cet arbre, on a la propriété suivante :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}, \quad \exists i \in \{1, \dots, N\}, \quad s \in \mathfrak{S}_N(i) \quad \text{et} \quad \tau(i) = t, \quad (7.17)$$

qui signifie simplement que les scénarios ont les mêmes pas de temps et que chaque pas de temps d'un scénario correspond à un nœud de l'arbre.

Définition 7.6. Soit l'opérateur linéaire de concentration $C : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{N}A}$ qui, à une variable non anticipative $x \in \mathcal{N}$, associe une variable définie sur l'arbre vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall s \in \mathfrak{S}_N(i) : \quad (Cx)_i = x_{s,\tau(i)}. \quad (7.18)$$

Remarque : Cette définition a bien un sens puisque si $x \in \mathcal{N}$, $x_{s,\tau(i)}$ est indépendant du choix de $s \in \mathfrak{S}_N(i)$.

Définition 7.7. Soit l'opérateur linéaire d'extension $E : \mathbb{R}^{\bar{N}A} \rightarrow \mathcal{N}$ qui, à une variable $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}A}$ définie sur l'arbre, associe une variable non anticipative définie sur le peigne vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall s \in \mathfrak{S}_N(i) : \quad (E\bar{x})_{s,\tau(i)} = \bar{x}_i. \quad (7.19)$$

Remarque : Les équations dans (7.18) et (7.19) sont des égalités vectorielles dans \mathbb{R}^m .

Le résultat suivant met en évidence le lien entre les opérateurs d'extension et de concentration.

Lemme 7.8. Les opérateurs d'extension et de concentration sont bijectifs et inverses l'un de l'autre.

$$C \circ E = Id_{\mathbb{R}^{\bar{N}A}} \quad \text{et} \quad E \circ C = Id_{\mathcal{N}}.$$

PREUVE : On démontre successivement les deux formules.

– Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}A}$. Alors, pour tout nœud i de l'arbre,

$$\begin{aligned} ((C \circ E)(\bar{x}))_i &= (E\bar{x})_{s,\tau(i)}, \quad \forall s \in \mathfrak{S}_N(i) \quad [(7.18)] \\ &= \bar{x}_i \quad [(7.19)]. \end{aligned}$$

– Soit $x \in \mathcal{N}$, et s, t respectivement un scénario et un pas de temps du peigne. Alors, d'après (7.17), il existe un nœud i tel que $s \in \mathfrak{S}_N(i)$ et $\tau(i) = t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} ((E \circ C)(x))_{s,t} &= (E(Cx))_{s,\tau(i)} \\ &= (Cx)_i \quad [(7.19)] \\ &= x_{s,\tau(i)} \quad [(7.18)] \\ &= x_{s,t}. \end{aligned}$$

◇

Le lemme ci-dessous permet de définir, pour chaque scénario, une surjection de $\mathbb{R}^{\bar{N}A}$ dans \mathbb{R}^{mT} à partir de l'opérateur d'extension.

Lemme 7.9.

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \forall x_s \in \mathbb{R}^{mT}, \quad \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}A}, \quad (E\bar{x})_s = x_s.$$

7.2. CONVERGENCE DES MULTIPLICATEURS ASSOCIÉS AUX CONTRAINTES NON DUALISÉES

PREUVE : Soit $s \in \mathcal{S}$, $x_s \in \mathbb{R}^{mT}$. On définit le vecteur $x \in \mathbb{R}^{NP}$ par

$$\forall s' \in \mathcal{S}, x_{s'} = x_s.$$

On a clairement $x \in \mathcal{N}$, et il suffit de poser $\bar{x} = Cx$. \diamond

Le lemme suivant montre la commutativité de l'opérateur J (défini au chapitre 6 précédent comme le projecteur orthogonal sur \mathcal{N}) avec une matrice diagonale qui a été « définie sur l'arbre, puis étendue sur le peigne », c'est-à-dire dont la diagonale est un vecteur appartenant à l'image de l'opérateur d'extension E . Il n'est pas utilisé dans ce chapitre, mais le sera dans la partie IV de ce manuscrit pour justifier l'opération de mise à l'échelle des variables, dans le cadre de l'application de l'algorithme du recouvrement progressif à un problème de gestion de production d'électricité.

Lemme 7.10. *Soit $\bar{d} \in \mathbb{R}^{\bar{N}A}$, et $d = E\bar{d}$. Alors, la matrice diagonale $\Delta \in \mathbb{R}^{NP} \times \mathbb{R}^{NP}$ dont les éléments diagonaux sont les coefficients d_i de d commute avec J .*

PREUVE : Soit $x \in \mathbb{R}^{NP}$, un scénario $s \in \mathcal{S}$, un pas de temps $t \in \{1, \dots, T\}$ et un indice de variable $l \in \{1, \dots, m\}$. Par (7.17), il existe un nœud $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $s \in \mathfrak{S}_N(i)$ et $\tau(i) = t$. Alors,

$$\begin{aligned} (\Delta Jx)_{s,t,l} &= d_{s,t,l}(Jx)_{s,t,l} && \text{[définition de } \Delta\text{]} \\ &= \bar{d}_{i,l}(Jx)_{s,t,l} && \text{[(7.19)]} \\ &= \bar{d}_{i,l} \sum_{s' \in \mathfrak{S}_N(i)} p_{s'} x_{s',t,l} \left(\sum_{s'' \in \mathfrak{S}_N(i)} p_{s''} \right)^{-1} && \text{[définition de } J\text{]} \\ &= d_{s'',t,l} \sum_{s' \in \mathfrak{S}_N(i)} p_{s'} x_{s',t,l} \left(\sum_{s'' \in \mathfrak{S}_N(i)} p_{s''} \right)^{-1}, \quad \forall s'' \in \mathfrak{S}_N(i) && \text{[(7.19)]} \\ &= \sum_{s' \in \mathfrak{S}_N(i)} p_{s'} d_{s',t,l} x_{s',t,l} \left(\sum_{s'' \in \mathfrak{S}_N(i)} p_{s''} \right)^{-1} \\ &= (J\Delta x)_{s,t,l} && \text{[définition de } \Delta\text{].} \end{aligned}$$

\diamond

7.2.2.2 Transformation des données

7.2.2.2.1 Les probabilités

Définition 7.11. On définit la *probabilité d'occurrence* \bar{p}_i d'un nœud $i \in \{1, \dots, N\}$ à partir des probabilités des scénarios passant par ce nœud de la manière suivante :

$$\bar{p}_i := \sum_{s \in \mathfrak{S}_N(i)} p_s. \quad (7.20)$$

On considère la matrice diagonale par blocs

$$\bar{P} := \text{Diag}(\bar{p}_1 Id_{\mathbb{R}^m}, \dots, \bar{p}_N Id_{\mathbb{R}^m}) \in \mathbb{R}^{\bar{N}A \times \bar{N}A}.$$

7.2.2.2 Le critère

Puisque l'un de nos objectifs est d'établir un lien entre les solutions primales des problèmes (7.15) et (7.13) (comme on le verra plus précisément au paragraphe 7.2.2.3.1), on relie les critères définis sur l'arbre et le peigne de manière à ce que l'égalité $\bar{F}(\bar{x}) = F(x)$ soit vérifiée pour $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{N}$ et $\bar{x} := Cx \in \bar{\mathcal{C}}$ vérifiant les contraintes de (7.15) et (7.13). Ainsi, puisque les variables sur l'arbre sont solidaires de celles du peigne par le biais de l'opérateur E , on définit, sur l'espace \mathcal{N} des variables non anticipatives, \bar{F} à partir de F , de la manière suivante.

Hypothèse 7.12.

$$\bar{F} = F \circ E. \quad (7.21)$$

Remarques :

1. Ainsi, si $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_A}$ et $x = E\bar{x}$, on vérifie bien que $\bar{F}(\bar{x}) = F(x)$.
2. Du fait de cette définition, les valeurs du critère F en des variables « anticipatives » (c'est-à-dire qui ne sont pas dans \mathcal{N}), ne sont pas prises en compte dans la définition de \bar{F} .
3. Cette formulation ne permet pas de retrouver les fonctions f_s , $s \in \mathcal{S}$, à partir de \bar{F} .

7.2.2.3 Gradient du critère

À partir de la relation précédente entre les critères des problèmes définis sur l'arbre et sur le peigne, on établit, par le lemme suivant, le lien entre leurs gradients en fonction de l'opérateur de moyenne pondérée J , de l'opérateur de concentration C et de la matrice diagonale de probabilités \bar{P} . Dans toute la suite on notera ∇ le gradient associé au produit scalaire euclidien.

Lemme 7.13. *Si F et \bar{F} sont reliés par (7.21), alors*

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_A} : \quad \nabla \bar{F}(\bar{x}) = \bar{P}CJ \begin{pmatrix} \nabla f_1((E\bar{x})_1) \\ \vdots \\ \nabla f_{N_S}((E\bar{x})_{N_S}) \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

PREUVE : Soit $\bar{x}, \bar{d} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_A}$; on pose $x = E\bar{x}$ et $d = E\bar{d}$.

$$\begin{aligned} \nabla \bar{F}(\bar{x})^\top \bar{d} &= \nabla F(x)^\top d \quad [(7.21)] \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \nabla f_s(x_s)^\top d_s \quad [(7.13)] \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{t=1}^T p_s \nabla_{x_{s,t}} f_s(x_s)^\top d_{s,t} \quad [\text{décomposition par pas de temps}] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{s \in \mathfrak{S}_N(i)} p_s \nabla_{x_{s,\tau(i)}} f_s(x_s)^\top d_{s,\tau(i)} \quad [\text{regroupement par nœuds}] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{s \in \mathfrak{S}_N(i)} p_s \nabla_{x_{s,\tau(i)}} f_s(x_s)^\top \bar{d}_i \quad [(7.19)]. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Or (7.23) est vrai pour un \bar{d} quelconque, donc pour tout nœud $i \in \{1, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \bar{F}(\bar{x}))_i &= \sum_{s \in \mathfrak{S}_N(i)} p_s \nabla_{x_{s,\tau(i)}} f_s(x_s) \\
 &= \sum_{s \in \mathfrak{S}_N(i)} p_s \begin{pmatrix} \nabla f_1((E\bar{x})_1) \\ \vdots \\ \nabla f_{N_S}((E\bar{x})_{N_S}) \end{pmatrix}_{s,\tau(i)} \\
 &= \bar{p}_i \left(CJ \begin{pmatrix} \nabla f_1((E\bar{x})_1) \\ \vdots \\ \nabla f_{N_S}((E\bar{x})_{N_S}) \end{pmatrix} \right)_i \quad [(7.20)],
 \end{aligned}$$

qui est la i -ème composante de

$$\bar{P}CJ \begin{pmatrix} \nabla f_1((E\bar{x})_1) \\ \vdots \\ \nabla f_{N_S}((E\bar{x})_{N_S}) \end{pmatrix}.$$

◇

Ainsi, du fait de la correspondance $\bar{F} = F \circ E$, le gradient de \bar{F} en un nœud est la somme pondérée des gradients de F sur chaque scénario correspondant à ce nœud.

7.2.2.2.4 Les contraintes

Les contraintes d'un problème formulé sur un arbre ne sont pas nécessairement décomposables nœud par nœud. Par exemple, dans le cas d'un problème de gestion de production d'électricité, il existe des contraintes dites « dynamiques » qui font intervenir les variables de deux pas de temps successifs (de telles contraintes sont par exemple liées à la gestion d'un stock). Il existe alors des conditions de compatibilité pour les contraintes définies sur l'arbre. En effet, si deux scénarios sont confondus avant un instant t , et si l'un d'eux a une contrainte ne faisant intervenir que des variables associées à des nœuds des instants précédents, il paraît naturel de supposer que le second possède également cette contrainte. Et une telle contrainte doit également faire partie de la formulation du problème sur l'arbre. Ainsi, il nous a semblé plus délicat de préciser les contraintes sur le peigne assorties de conditions de compatibilité, que de définir en premier lieu les contraintes sur l'arbre (qui sont plus simples à exprimer, même si elles ne peuvent pas non plus être arbitraires) et de les transposer ensuite sur le peigne.

Définition 7.14. On introduit la multifonction $\mathfrak{S}_C : \{1, \dots, \bar{n}\} \rightarrow \mathcal{S}$ qui à un indice de contrainte i associe l'ensemble des scénarios dans lesquels cette contrainte est présente.

Pour un scénario $s \in \mathcal{S}$, on définit l'ensemble des indices des contraintes de ce scénario comme l'image de s par la multifonction inverse de \mathfrak{S}_C , $\mathfrak{S}_C^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \{1, \dots, \bar{n}\}$.

Le graphe de la multifonction \mathfrak{S}_C s'exprime de deux manières équivalentes :

$$\mathcal{G}r(\mathfrak{S}_C) = \{(i, s) \in \{1, \dots, \bar{n}\} \times \mathcal{S} / s \in \mathfrak{S}_C(i)\} = \{(i, s) \in \{1, \dots, \bar{n}\} \times \mathcal{S} / i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)\}. \quad (7.24)$$

Ces deux multifonctions inverses l'une de l'autre permettent de définir les contraintes du problème sur le peigne à partir des contraintes sur l'arbre formulées en (7.16), en faisant l'hypothèse suivante.

Hypothèse 7.15.

$$\forall i \in \{1, \dots, \bar{n}\}, \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_C(i) \neq \emptyset, & (7.25a) \\ \forall s \in \mathfrak{S}_C(i), \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_A}, \quad c_{s,i}((E\bar{x})_s) = \bar{c}_i(\bar{x}). & (7.25b) \end{cases}$$

On peut à présent décrire les contraintes du problème (7.13) défini sur le peigne de la manière suivante :

$$x \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall i \in \bar{E}, & \forall s \in \mathfrak{S}_C(i), & c_{s,i}(x_s) = 0, \\ \forall i \in \bar{I}, & \forall s \in \mathfrak{S}_C(i), & c_{s,i}(x_s) \leq 0. \end{cases}$$

Ainsi, les fonctions $c_{s,i}$ peuvent être considérées comme les composantes d'une fonction $c : \mathbb{R}^{N_P} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dont la dimension de l'espace d'arrivée correspond au cardinal du graphe de \mathfrak{S}_C , c'est-à-dire, en utilisant l'égalité (7.24),

$$n := \sum_{i=1}^{\bar{N}} |\mathfrak{S}_C(i)| = \sum_{s \in \mathcal{S}} |\mathfrak{S}_C^{-1}(s)|.$$

Remarques :

1. Les contraintes $c_{s,i}$ sont bien définies sur tout l'ensemble \mathbb{R}^{m_T} (on le déduit du lemme 7.9) et sont à valeurs dans \mathbb{R} .
2. L'indice i d'une contrainte $c_{s,i}$ du peigne fait référence à l'indice de la i -ème contrainte de l'arbre (et non à une numérotation des contraintes liée au scénario s).

On montre à présent qu'un vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_A}$ est réalisable pour le problème (7.15) si, et seulement si, $E\bar{x}$ est réalisable pour le problème (7.13). Cela s'exprime par le lemme suivant.

Lemme 7.16. *Dans le cadre de l'hypothèse 7.15, on a :*

$$E(\bar{\mathcal{C}}) = \mathcal{C} \cap \mathcal{N} \quad \text{et} \quad C(\mathcal{C} \cap \mathcal{N}) = \bar{\mathcal{C}}.$$

PREUVE :

- On montre dans chaque sens les inclusions correspondant à la première égalité.
- Soit $\bar{x} \in \bar{\mathcal{C}}$ et $x := E\bar{x}$. Par définition de E , $x \in \mathcal{N}$. De plus, par l'hypothèse 7.15, pour tout $i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$, pour tout $s \in \mathfrak{S}_C(i)$, $c_{s,i}(x_s) = \bar{c}_i(\bar{x})$, que l'on réécrit, puisque $\bar{x} \in \bar{\mathcal{C}}$,

$$\begin{cases} c_{s,i}(x_s) = 0 & \text{si } i \in \bar{E}, \\ c_{s,i}(x_s) \leq 0 & \text{si } i \in \bar{I}. \end{cases}$$

Ainsi, $x \in \mathcal{C}$.

- Soit $x \in \mathcal{C} \cap \mathcal{N}$ et $\bar{x} := Cx$ (bien défini car $x \in \mathcal{N}$). Soit $i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$ et $s \in \mathfrak{S}_C(i)$ (par (7.25b)). Comme précédemment, on a $c_{s,i}(x_s) = \bar{c}_i(\bar{x})$, et on en déduit de même que $\bar{x} \in \bar{\mathcal{C}}$ avec $x = E\bar{x}$, c'est-à-dire $x \in E(\bar{\mathcal{C}})$.
- On déduit la seconde égalité de la première et du lemme 7.8. ◇

On définit à présent la notion de « dépendance à un nœud » pour une contrainte définie sur l'arbre.

Définition 7.17. Soit $i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$. On dit que la contrainte \bar{c}_i dépend du nœud $j \in \{1, \dots, N\}$ s'il existe $\bar{x}, \bar{x}' \in \mathbb{R}^{\bar{N}_A}$ ne différant que par leur composante en le nœud j ($\bar{x}_j \neq \bar{x}'_j$) tels que :

$$\bar{c}_i(\bar{x}) \neq \bar{c}_i(\bar{x}').$$

Cela nous permet d'établir également le lemme suivant.

Lemme 7.18. *On se place dans le cadre de l'hypothèses 7.15. Soit $i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$ un indice de contrainte et $j \in \{1, \dots, N\}$ un nœud. Si la contrainte \bar{c}_i dépend du nœud $j : \mathfrak{S}_C(i) \subset \mathfrak{S}_N(j)$.*

7.2. CONVERGENCE DES MULTIPLICATEURS ASSOCIÉS AUX CONTRAINTES NON DUALISÉES

PREUVE : Soit $s \in \mathfrak{S}_C(i)$ et $\bar{x}, \bar{x}' \in \mathbb{R}^{\bar{N}^A}$ ne différant que par leur composante en le nœud j . On suppose que \bar{x} et \bar{x}' vérifient $\bar{c}_i(\bar{x}) \neq \bar{c}_i(\bar{x}')$. Alors, d'après (7.25b), on a également :

$$c_{s,i}((E\bar{x})_s) \neq c_{s,i}((E\bar{x}')_s). \quad (7.26)$$

On en déduit que $s \in \mathfrak{S}_N(j)$, car sinon on aurait $(E\bar{x})_s = (E\bar{x}')_s$, ce qui contredirait (7.26). \diamond

Remarques :

1. Ce lemme implique plus précisément le fait que, pour $i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$, une contrainte \bar{c}_i ne peut pas dépendre de deux nœuds $j, k \in \{1, \dots, N\}$ qui n'appartiennent pas à un même scénario. En effet, si \bar{c}_i dépend de variables définies aux nœuds j et k , d'après le lemme précédent on a $\mathfrak{S}_C(i) \subset \mathfrak{S}_N(j) \cap \mathfrak{S}_N(k)$, avec $\mathfrak{S}_C(i) \neq \emptyset$ par l'hypothèse 7.15; ainsi $\mathfrak{S}_N(j) \cap \mathfrak{S}_N(k) \neq \emptyset$, et les deux nœuds appartiennent à un même scénario.
2. On a ainsi $\mathfrak{S}_C(i) \subset \bigcap \{\mathfrak{S}_N(j) / \bar{c}_i \text{ dépend du nœud } j\}$, mais pas l'inclusion dans le sens opposé. Si l'on avait égalité entre ces ensembles, cela impliquerait que chaque scénario du peigne passant par tous les nœuds dont dépend la i -ème contrainte de l'arbre serait concerné par cette contrainte. Il s'agit d'une hypothèse plus forte que 7.15, qui ne s'avère pas nécessaire ici.

7.2.2.2.5 Dérivées partielles des contraintes

On déduit de la relation (7.25b) :

$$\begin{aligned} \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}^A}, \forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall s \in \mathfrak{S}_N(j), \forall i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s), \\ \nabla_{\bar{x}_j} \bar{c}_i(\bar{x}) = \nabla_{x_{s,\tau(j)}} c_{s,i}((E\bar{x})_s). \end{aligned} \quad (7.27)$$

De plus, par le lemme 7.18, on a

$$\nabla_{\bar{x}_j} \bar{c}_i(\bar{x}) \neq 0 \implies \mathfrak{S}_C(i) \subset \mathfrak{S}_N(j). \quad (7.28)$$

7.2.2.3 Lien entre les solutions

On établit à présent le lien entre les solutions primales et duales des problèmes (7.15) et (7.13).

7.2.2.3.1 Les solutions primales

On déduit la proposition suivante de ce qui précède.

Proposition 7.19. *Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\bar{N}^A}$ et $x := E\bar{x}$. Alors, \bar{x} est solution du problème (7.15) si, et seulement si, x est solution du problème (7.13).*

PREUVE : On a déjà vu au lemme 7.16 l'équivalence entre la réalisabilité de x et celle de \bar{x} . Soit y réalisable pour (7.13), et $\bar{y} = Cy$. Alors \bar{y} est également réalisable pour (7.15). En outre, par (7.21), et d'après le lemme 7.8,

$$F(x) = \bar{F}(\bar{x}) \quad \text{et} \quad F(y) = \bar{F}(\bar{y}).$$

On en déduit

$$F(x) \leq F(y) \iff F(\bar{x}) \leq \bar{F}(\bar{y}).$$

\diamond

7.2.2.3.2 Les solutions duales

Le lien entre les multiplicateurs des problèmes (7.13) et (7.15) peut être établi par le biais d'au moins deux approches. Ainsi, il est possible d'utiliser la notion de point-selle (théorie globale), qui est toutefois souvent circonscrite aux problèmes convexes, ou bien de raisonner à partir des conditions d'optimalité (théorie locale), méthode que nous avons adoptée ici. Alors, un multiplicateur est dit optimal s'il vérifie les conditions de Karush, Kuhn et Tucker.

Soit $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{N}^\perp$ des multiplicateurs associés respectivement aux contraintes $Kx = 0$ et $x \in \mathcal{C}$ de (7.13). On écrit le lagrangien classique du problème (7.13) :

$$\begin{aligned} \ell(x, \mu, \lambda) &:= F(x) + \langle \lambda | x \rangle + \langle \mu | c(x) \rangle \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}} p_s \left(f_s(x_s) + \lambda_s^\top x_s + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)} \mu_{s,i} c_{s,i}(x_s) \right). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Remarque : Pour définir ce lagrangien nous avons utilisé le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ introduit au chapitre précédent, qui fait intervenir les probabilités associées aux scénarios. Ainsi les multiplicateurs sont liés à ces probabilités. L'intérêt présenté par ce choix est la mise en facteurs des probabilités p_s dans l'expression (7.29) du lagrangien. Cependant, d'autres alternatives de produits scalaires restent possibles.

Un couple $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^{N_P} \times \mathcal{N}^\perp$ est un couple de multiplicateurs optimaux de (7.13) associés à une solution primale x si :

$$\begin{cases} \nabla_x \ell(x, \mu, \lambda) = 0, & (7.30a) \\ \forall i \in \bar{I}, \quad \forall s \in \mathfrak{S}_C(i), \quad \mu_{s,i} \geq 0, & (7.30b) \\ \forall i \in \bar{I}, \quad \forall s \in \mathfrak{S}_C(i), \quad \mu_{s,i} c_{s,i}(x_s) = 0, & (7.30c) \end{cases}$$

où on a noté ∇_x le gradient par rapport à x pour le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^{N_P} .

De même, soit $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ un multiplicateur associé aux contraintes de (7.15). On écrit également le lagrangien classique du problème (7.15).

$$\begin{aligned} \bar{\ell}(\bar{x}, \bar{\mu}) &:= \bar{F}(\bar{x}) + \langle \bar{\mu}, \bar{c}(\bar{x}) \rangle \\ &= \bar{F}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{\mu}_i \bar{c}_i(\bar{x}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Remarque : Dans ce cas, on a utilisé le produit scalaire euclidien car les contraintes \bar{c}_i ne sont attachées ni à un nœud ni à un scénario, et que les probabilités n'interviennent pas ici de manière naturelle.

Un vecteur $\bar{\mu}$ est un multiplicateur optimal de (7.15), associé à une solution primale \bar{x} si :

$$\begin{cases} \nabla_{\bar{x}} \bar{\ell}(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0, & (7.32a) \\ \forall i \in \bar{I}, \quad \bar{\mu}_i \geq 0, & (7.32b) \\ \forall i \in \bar{I}, \quad \bar{\mu}_i \bar{c}_i(\bar{x}) = 0, & (7.32c) \end{cases}$$

où on a de nouveau noté $\nabla_{\bar{x}}$ le gradient par rapport à \bar{x} pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^{\bar{N}_A}$.

Proposition 7.20. *On se place dans le cadre des hypothèses 7.1, 7.12 et 7.15. Soit x une solution primale du problème (7.13), et $\bar{x} := Cx$ une solution primale de (7.15). On suppose F et c différentiables en x . Alors \bar{F} est différentiable en \bar{x} , et on a de plus :*

7.2. CONVERGENCE DES MULTIPLICATEURS ASSOCIÉS AUX CONTRAINTES NON DUALISÉES

1. si (μ, λ) est un couple de multipliateurs optimaux associés à la solution x du problème (7.13), alors le vecteur $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ défini par

$$\forall i \in \{1, \dots, \bar{n}\}, \quad \bar{\mu}_i := \sum_{s \in \mathfrak{S}_C(i)} p_s \mu_{s,i} \quad (7.33)$$

est un multipliateur optimal associé à la solution \bar{x} du problème (7.15) ;

2. réciproquement, si $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ est un multipliateur optimal associé à la solution \bar{x} du problème (7.15) et si $\mu \in \mathbb{R}^n$ vérifie les équations (7.33), (7.30b) et (7.30c), alors le vecteur défini par

$$\lambda := - \left(\nabla F(x) + c'(x)^\top \mu \right) \quad (7.34)$$

appartient à \mathcal{N}^\perp , et (μ, λ) est ainsi un couple de multipliateurs optimaux associés à la solution x du problème (7.13).

PREUVE : La différentiabilité de \bar{F} en \bar{x} se déduit immédiatement de l'hypothèse 7.12.

- [1.] Soit $\lambda \in \mathcal{N}$ tel que (μ, λ) soit un couple de multipliateurs optimaux de (7.13) associés à la solution primale x . Alors

$$\nabla_x \ell(x, \mu, \lambda) = 0, \quad (7.35)$$

que l'on réécrit, à l'aide de (7.29), de la manière suivante :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \nabla_{x_s} f_s(x_s) + \lambda_s + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)} \nabla_{x_s} c_{s,i}(x_s) \mu_{s,i} = 0,$$

qui équivaut, par concaténation, à

$$\left(\begin{array}{c} \nabla_{x_1} f_1((E\bar{x})_1) + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(1)} \nabla_{x_1} c_{1,i}(x_1) \mu_{1,i} \\ \vdots \\ \nabla_{x_{N_S}} f_{N_S}((E\bar{x})_{N_S}) + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(N_S)} \nabla_{x_{N_S}} c_{N_S,i}(x_{N_S}) \mu_{N_S,i} \end{array} \right) + \lambda = 0.$$

Pour éliminer λ qui n'apparaît pas dans (7.31), on multiplie cette égalité à gauche par $\bar{P}CJ$ et, puisque $J\lambda = 0$ (car $\lambda \in \mathcal{N}$), on obtient :

$$\bar{P}CJ \left(\begin{array}{c} \nabla_{x_1} f_1((E\bar{x})_1) + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(1)} \nabla_{x_1} c_{1,i}(x_1) \mu_{1,i} \\ \vdots \\ \nabla_{x_{N_S}} f_{N_S}((E\bar{x})_{N_S}) + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(N_S)} \nabla_{x_{N_S}} c_{N_S,i}(x_{N_S}) \mu_{N_S,i} \end{array} \right) = 0,$$

qui équivaut, en utilisant le lemme 7.13, à :

$$\nabla_{\bar{x}} \bar{F}(\bar{x}) + \bar{P}CJ \left(\begin{array}{c} \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(1)} \nabla_{x_1} c_{1,i}(x_1) \mu_{1,i} \\ \vdots \\ \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(N_S)} \nabla_{x_{N_S}} c_{N_S,i}(x_{N_S}) \mu_{N_S,i} \end{array} \right) = 0, \quad (7.36)$$

et que l'on réécrit nœud par nœud : $\forall j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} & \nabla_{\bar{x}_j} \bar{F}(\bar{x}) + \sum_{s \in \mathfrak{S}_N(j)} p_s \left(\sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)} \nabla_{x_{s,\tau(j)}} c_{s,i}(x_s) \mu_{s,i} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \nabla_{\bar{x}_j} \bar{F}(\bar{x}) + \sum_{s \in \mathfrak{S}_N(j)} p_s \left(\sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)} \nabla_{\bar{x}_j} \bar{c}_i(\bar{x}) \mu_{s,i} \right) = 0 \quad [(7.27)]. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Or, puisque l'on a l'équivalence :

$$i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s) \quad \Leftrightarrow \quad s \in \mathfrak{S}_C(i),$$

on obtient l'égalité entre les deux ensembles :

$$\{(s, i) \in \mathcal{S} \times \{1, \dots, \bar{n}\} / s \in \mathfrak{S}_N(j), i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)\} = \{(s, i) \in \mathcal{S} \times \{1, \dots, \bar{n}\} / s \in \mathfrak{S}_N(j) \cap \mathfrak{S}_C(i)\},$$

ce qui permet la permutation des sommes sur s et i de (7.37), de manière à écrire, pour chaque nœud $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\nabla_{\bar{x}_j} \bar{F}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{s \in \mathfrak{S}_N(j) \cap \mathfrak{S}_C(i)} p_s \nabla_{\bar{x}_j} \bar{c}_i(\bar{x}) \mu_{s,i} = 0,$$

qui équivaut, par l'implication (7.28), à

$$\nabla_{\bar{x}_j} \bar{F}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \nabla_{\bar{x}_j} \bar{c}_i(\bar{x}) \sum_{s \in \mathfrak{S}_C(i)} p_s \mu_{s,i} = 0,$$

c'est-à-dire, d'après la définition (7.33) :

$$\nabla_{\bar{x}_j} \bar{F}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \nabla_{\bar{x}_j} \bar{c}_i(\bar{x}) \bar{\mu}_i = 0.$$

Par concaténation, on obtient alors : $\nabla_{\bar{x}} \bar{F}(\bar{x}) + \nabla_{\bar{x}} \bar{c}(\bar{x})^\top \bar{\mu} = 0$, et on en déduit (7.32a).

En outre, puisque les p_s sont choisis strictement positifs :

$$(7.30b) \quad \Rightarrow \quad (7.32b).$$

Enfin, pour un indice de contrainte d'inégalité quelconque $i \in \bar{I}$, on a

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_i \bar{c}_i(\bar{x}) &= \sum_{s \in \mathfrak{S}_C(i)} p_s \mu_{s,i} \bar{c}_i(\bar{x}) \quad [(7.33)] \\ &= \sum_{s \in \mathfrak{S}_C(i)} p_s \mu_{s,i} c_{s,i}(x_s) \quad [(7.25b)] \\ &= 0 \quad [(7.30c)]. \end{aligned}$$

On en déduit (7.32c).

[2.] Le principe de la démonstration de la réciproque repose sur la reprise, en sens inverse, des déductions effectuées pour le premier point. Ainsi, puisque l'on a (7.32a) et (7.33), on retrouve (7.36). D'après le lemme 7.13, cela se réécrit :

$$\bar{P}CJ(\nabla F(x) + c'(x)^\top \mu) = 0,$$

c'est-à-dire, d'après la définition (7.34) de λ :

$$\bar{P}CJ\lambda = 0.$$

Or \bar{P} est inversible et, par le lemme 7.8, $E \circ C = Id_{\mathcal{N}}$. On en déduit que $J\lambda = 0$, où J est l'opérateur de projection orthogonale sur \mathcal{N} . Ainsi, $\lambda \in \mathcal{N}^\perp$. Par (7.34), (7.30a) est vérifiée, et puisque l'on a supposé (7.30b) et (7.30c), (μ, λ) est un couple de multiplicateurs optimaux associés à la solution x du problème (7.13). ◇

Remarque : La présence des probabilités dans (7.33) est due d'une part à leur présence dans le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Ainsi, si l'on change le produit scalaire utilisé dans la définition du lagrangien du problème défini sur le peigne, et que l'on en choisit un ne faisant pas intervenir les probabilités, on peut obtenir un résultat similaire, mais qui ne fait pas non plus intervenir les probabilités :

$$\bar{\mu}_i := \sum_{s \in \mathfrak{S}_C(i)} \mu_{s,i}.$$

D'autre part, elle est liée à l'utilisation des probabilités dans la définition (7.14) de F à partir des f_s , qui induit la présence de la matrice \bar{P} dans le lien (7.22) entre les gradients de F et \bar{F} .

7.2.3 Convergence des variables duales dans le cas convexe

Les considérations de la sous-section précédente étaient indépendantes de l'algorithme considéré ; elles visaient uniquement à établir la correspondance entre les deux formulations d'un problème et ses solutions primales et duales. On s'intéresse à présent en particulier à l'application de l'algorithme du recouvrement progressif à de tels problèmes. On montre plus précisément que, pour chaque sous-problème lié à un scénario $s \in \mathcal{S}$ résolu itérativement par l'algorithme, les multiplicateurs associés à des contraintes convergent vers ceux associés aux mêmes contraintes dans le problème initial formulé sur le peigne.

On se place alors dans le cas d'un problème convexe, de manière à pouvoir appliquer le résultat de [Rockafellar et Wets, 1991], rappelé à la proposition 6.14, selon lequel l'algorithme du recouvrement progressif converge. On effectue également une hypothèse de régularité, qui nous permettra d'assurer l'existence d'une solution duale.

Hypothèse 7.21. On suppose les fonctions $(f_s)_{s \in \mathcal{S}}$ et $(\bar{c}_i)_{i \in \bar{I}}$ convexes et différentiables, et les $(\bar{c}_i)_{i \in \bar{E}}$ affines.

On rappelle qu'à chaque itération k , l'algorithme du recouvrement progressif résout, pour chaque scénario $s \in \mathcal{S}$, un sous-problème de la forme suivante.

$$\begin{cases} \min_{x_s \in \mathbb{R}^{mT}} f_s(x_s) + x_s^\top \lambda_s^k + \frac{r}{2} \|x_s - Jx_s^k\|_2^2, \\ \forall i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s) \cap \bar{E}, & c_{s,i}(x_s) = 0, \\ \forall j \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s) \cap \bar{I}, & c_{s,j}(x_s) \leq 0. \end{cases} \quad (7.38)$$

Par la proposition 6.14, sous l'hypothèse 6.13, les problèmes (7.38) ont une solution unique x^{k+1} .¹ Ainsi, sous l'hypothèse (7.21), il suffit d'avoir une condition de qualification des contraintes pour que, pour tout scénario s et à chaque itération k , il existe une solution primale-duale du problème (7.38).

1. C'est pourquoi l'on écrit les problèmes (7.38) avec un min et non un inf.

Hypothèse 7.22. On suppose que, pour tout scénario $s \in \mathcal{S}$, et pour tout point admissible $x_s \in \mathcal{C}_s$, les gradients $\{\nabla c_{s,i}(x_s) / i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s), c_{s,i}(x_s) = 0\}$ des contraintes d'égalité et d'inégalité actives en x_s sont linéairement indépendants.

Cette hypothèse de qualification des contraintes présente un double intérêt. En effet, en plus d'assurer l'existence d'une solution duale pour les sous-problèmes résolus itérativement par l'algorithme, elle permet également de montrer la convergence de ces solutions duales vers une solution duale du problème (7.13). On obtient ainsi le théorème suivant.

Théorème 7.23. *On se place dans le cadre des hypothèses 7.1, 7.12, 7.15, 7.21 et 7.22. Soit (x_s^k, μ_s^k) une solution primale-duale du sous-problème associé au scénario s résolu à l'itération k de l'algorithme du recouvrement progressif, et $x^k := (x_s^k)_{s \in \mathcal{S}}$, $\mu^k := (\mu_s^k)_{s \in \mathcal{S}}$. Alors les suites $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\mu^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers une solution primale et un multiplicateur associé aux contraintes $x \in \mathcal{C}$ du problème (7.13).*

De plus, le vecteur $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ défini par

$$\forall i \in \{1, \dots, \bar{n}\} : \quad \bar{\mu}_i := \sum_{s \in \mathfrak{S}_C(i)} p_s \mu_{s,i}$$

est multiplicateur optimal associé à la solution $\bar{x} := Cx$ du problème (7.15) pour les contraintes $\bar{x} \in \bar{\mathcal{C}}$.

PREUVE : En dualisant les contraintes $x_s \in \mathcal{C}_s$, on obtient le lagrangien classique associé au problème (7.38) :

$$\ell^{k,s}(x_s, \mu_s^k) := f_s(x_s) + \langle x_s, \lambda_s^k \rangle + \frac{r}{2} \|x_s - Jx_s^k\|_2^2 + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)} c_{s,i}(x_s) \mu_{s,i}^k,$$

et, grâce à l'hypothèse de qualification des contraintes, son gradient en x^{k+1} s'annule, c'est-à-dire :

$$\nabla f_s(x_s^{k+1}) + \lambda_s^k + r(x_s^{k+1} - Jx_s^k) + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)} \nabla c_{s,i}(x_s^{k+1}) \mu_{s,i}^k = 0. \quad (7.39)$$

En outre, on a les relations de complémentarité :

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \forall i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s), \quad c_{s,i}(x_s^k) \mu_{s,i}^k = 0, \quad (7.40)$$

ainsi que la positivité des $\mu_{s,i}^k$:

$$\forall s \in \mathcal{S}, \quad \forall i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s), \quad \mu_{s,i}^k \geq 0. \quad (7.41)$$

Or dans le cas convexe, comme on l'a vu au théorème 6.17, on a convergence de $(x^k, \lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers une solution primale-duale $(x, \lambda) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\perp$ du problème (7.13). On en déduit que

$$\left(\nabla f_s(x_s^{k+1}) + \lambda_s^k + r(x_s^{k+1} - Jx_s^k) \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \nabla f_s(x_s) + \lambda_s,$$

et donc, par (7.39) que

$$\left(\sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)} \nabla c_{s,i}(x_s^{k+1}) \mu_{s,i}^k \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } -\nabla f_s(x_s) - \lambda_s. \quad (7.42)$$

On note $\bar{I}_{A,s}$ l'ensemble des indices des contraintes d'égalité et d'inégalité actives en x_s pour le problème (7.13), et $\bar{I}_{A,s}^c$ son complémentaire dans $\mathfrak{S}_C^{-1}(s)$. Pour un indice de contrainte d'inégalité

7.2. CONVERGENCE DES MULTIPLICATEURS ASSOCIÉS AUX CONTRAINTES NON DUALISÉES

inactive $i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s) \cap \bar{I}_{A,s}^c$, pour k assez grand, $c_{s,i}(x_s^k) < 0$ (car x est un point admissible de (7.13) et est limite de $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$). Ainsi, par (7.40), pour k assez grand,

$$\forall i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s) \cap \bar{I}_{A,s}^c, \quad \mu_{s,i}^k = 0,$$

et on obtient par (7.42) que

$$\left(\sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s) \cap \bar{I}_{A,s}^c} \nabla c_{s,i}(x_s^{k+1}) \mu_{s,i}^k \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

Et puisque les gradients des contraintes d'égalité et d'inégalité actives en x_s^k sont linéairement indépendants (hypothèse 7.22), on en déduit, pour tout $s \in \mathcal{S}$, la convergence des μ_s^k vers un μ_s^* , avec, par passage à la limite dans (7.42) :

$$\nabla f_s(x_s) + \lambda_s + \sum_{i \in \mathfrak{S}_C^{-1}(s)} \nabla c_{s,i}(x_s) \mu_{s,i}^* = 0,$$

c'est-à-dire avec $\mu^* := (\mu_s^*)_{s \in \mathcal{S}}$ vérifiant (7.30a).

En outre, par passage à la limite dans (7.40) et (7.41), (7.30b) et (7.30c) sont vérifiées par μ^* , et les suites $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\mu^k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers une solution primale et un multiplicateur associé aux contraintes $x \in \mathcal{C}$ du problème (7.13).

On déduit de la proposition 7.20 que le vecteur $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ défini par (7.33) est multiplicateur optimal associé à la solution \bar{x} du problème (7.15) pour les contraintes $\bar{x} \in \bar{\mathcal{C}}$ \diamond

7.2.4 Exploitation du résultat

Nous avons appliqué le résultat du théorème 7.23 à un problème de gestion à moyen-terme de la production d'électricité, comme cela est décrit à la partie IV suivante. Nous y avons obtenu des résultats numériques qui corroborent la possibilité de calculer, à la convergence de l'algorithme du recouvrement progressif, les coûts maginaux de l'électricité.

Quatrième partie

Application : la gestion de production d'électricité

Chapitre 8

Application du recouvrement progressif à un problème de gestion de production d'électricité

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'application d'une méthode de décomposition par scénarios à un outil industriel de gestion de production.

Par souci d'éclairer les enjeux de notre étude, nous présentons d'abord certains éléments clés de la problématique de la gestion des unités de production nucléaires, ainsi que le problème effectivement résolu. Puis nous exposons les résultats numériques que nous avons obtenus en appliquant l'algorithme du recouvrement progressif à un outil de gestion de production des centrales thermiques - comprenant les unités nucléaires et thermiques à flammes - à l'horizon moyen-terme. Ces résultats ont été présentés lors de la conférence [Chiche *et col.*, 2011], et une partie sont développés dans l'article, en cours de finalisation, [Barty *et col.*, 2012].

8.1 Présentation du modèle étudié

8.1.1 La gestion du nucléaire

Les enjeux de la gestion du nucléaire concernent d'une part le placement des arrêts des tranches, et d'autre part la stratégie de gestion des stocks.

8.1.1.1 Le placement des arrêts des tranches

Il s'agit là de décider des dates des arrêts des 58 tranches nucléaires sur une période de cinq ans, avec un pas de temps hebdomadaire.

Pour ce faire, on minimise une fonction objectif constituée des coûts des rechargements en combustible, qui dépendent du nombre d'arrêts, ainsi que d'une valorisation du stock restant à la fin de la période d'étude, et également des « coûts système » qui représentent le coût du thermique à flamme et des échanges sur les marchés nécessaires à la satisfaction de la demande en complément du nucléaire.

En plus de la satisfaction de la demande et des contraintes techniques liées à la production, les contraintes à prendre en compte couplent les dates d'arrêts entre eux. Il y a ainsi un nombre maximum d'arrêts en parallèle et des contraintes d'espacement minimum entre les dates d'arrêts de tranches d'un même site, pour des raisons pratiques d'exploitation de ressources matérielles et humaines.

8.1.1.2 La valorisation des stocks

L'intérêt de déterminer, à chaque instant, des valeurs d'usage pour les stocks des différentes tranches est d'aider l'exploitant à arbitrer entre utiliser l'énergie ou à la conserver pour le futur. En pratique, EDF utilise chaque semaine un outil d'aide à la décision pour effectuer cet arbitrage ; il s'agit de l'outil « SOPRANO », qui a en particulier été décrit lors de la conférence [Porcheron *et col.*, 2011].

8.1.2 L'outil SOPRANO

8.1.2.1 Description générale

La fonction de l'outil SOPRANO est l'optimisation stochastique du parc de production soumis à différents aléas (sous forme de scénarios), en vue de fournir une stratégie de gestion pour chacun des stocks d'énergie du parc de production. Il considère en entrée les descriptions du parc de production, de l'horizon temporel et des aléas. En sortie, les stratégies de gestion des stocks qu'il fournit se présentent sous la forme d'une fonction de Bellman qui valorise économiquement l'utilisation d'un stock¹. Ainsi, l'exploitant peut décider à chaque instant de l'utilisation de l'énergie d'un stock sur un critère économique simple d'empilement des coûts.

8.1.2.2 Modélisation

Les choix de modélisation inhérents à l'outil SOPRANO sont décrits dans [Romanet, 2003b]. Dans ce paragraphe, nous en résumons les principaux aspects.

La période d'étude est discrétisée en pas de temps de durées variables. Chaque pas de temps est décomposé en postes horaires comptant un nombre entier d'heures. Ces postes ne sont pas nécessairement chronologiques ; ils regroupent des heures du pas de temps possédant les mêmes caractéristiques, par exemple les heures creuses d'une journée.

Les unités considérées pour modéliser le parc sont les productions hydrauliques, thermiques classiques et nucléaires, ainsi que les contrats d'effacements. On considère également parmi ces unités les marchés de l'électricité, représentés comme des groupes thermiques classiques de coût et de puissance aléatoires. Le coût d'utilisation de ces unités dites *groupes marchés* correspond au prix de l'électricité sur le marché ; on désigne leur puissance par le terme de *profondeur du marché*. À l'ensemble des unités de production « réelles », on ajoute un groupe thermique classique supplémentaire de coût proportionnel très élevé (par exemple 3000 euros/MWh) et de puissance « infinie ». Ce groupe supplémentaire représente la « défaillance », qui a lieu lorsque le parc de production n'est pas en mesure de satisfaire la consommation électrique imposée ; il sert à assurer l'équilibre offre-demande du modèle.

Définition 8.1. La *défaillance* de production d'électricité à un instant t est la différence entre la somme des productions par toutes les unités à disposition à t et la demande totale des consommateurs à t .

Remarque : On ne considère pas ici la défaillance due aux réseaux, mais uniquement celle résultant de l'écart entre l'offre et la demande.

8.1.2.3 Formulation mathématique du problème

8.1.2.3.1 Les variables

Les variables du problème sont, pour toutes les unités de production $\ell \in \mathcal{L}$, et en chaque nœud $n \in \mathcal{O}$ de l'arbre :

1. Chaque MWh d'énergie est valorisé en euros.

- l'état du stock $x^\ell(n)$,
- la production (commande) $u^\ell(p)$ en chaque poste horaire p du nœud n .

8.1.2.3.2 Le critère

Il s'agit de minimiser la fonction-objectif :

$$\underbrace{\sum_{\ell \in \mathcal{L}}}_{\text{unités de production}} \quad \underbrace{\sum_{n \in \mathcal{O}}}_{\text{nœuds de l'arbre}} \quad \underbrace{\sum_{p \in \mathcal{P}_n}}_{\text{postes horaires}} \quad \underbrace{\pi_n}_{\text{probabilité d'occurrence du nœud } n} \quad \text{Coût}_p^\ell(x^\ell(n), u^\ell(p)),$$

sous des contraintes dites « physiques » ou encore « de fonctionnement », décrites au paragraphe suivant 8.1.2.3.3. Plus précisément, les coûts de production de chaque unité $\ell \in \mathcal{L}$ correspondent, en un nœud $n \in \mathcal{O}$ de l'arbre, et en un poste horaire $p \in \mathcal{P}_n$ de ce nœud, à :

- pour les unités $\ell \in \mathcal{L}_{ThC} \cup \mathcal{L}_M$ associées aux groupes thermiques classiques et aux marchés, un coût proportionnel :

$$\text{Coût}_p^\ell(x^\ell(n), u^\ell(p)) = c^\ell(p)u^\ell(p)d(p),$$

où on a noté $d(p)$ la durée (en heures) d'un poste horaire $p \in \mathcal{P}_n$ d'un nœud $n \in \mathcal{O}$ ²,

- pour les unités $\ell \in \mathcal{L}_{ThN} \cup \mathcal{L}_{RH} \cup \mathcal{L}_C$ associées aux tranches nucléaires, aux réserves hydrauliques, et aux contrats d'effacements, une valorisation proportionnelle du stock final :

$$\text{Coût}_p^\ell(x^\ell(n), u^\ell(p)) = \begin{cases} V^\ell(n)x^\ell(n) & \text{si } n \text{ est un nœud terminal,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les coûts $c^\ell(p)$ et valorisations $V^\ell(n)$ sont des données du problème.

8.1.2.3.3 Les contraintes de fonctionnement et l'équilibre offre-demande

Dans toute la suite, on notera, pour chaque unité $\ell \in \mathcal{L}$ concernée :

- P_{\min}^ℓ et P_{\max}^ℓ les productions minimale et maximale respectives (qui peuvent être fixes ou dépendre du poste horaire, selon l'unité ℓ considérée),
- X_{\min}^ℓ et X_{\max}^ℓ les stocks minimal et maximal respectifs,
- δ_f^ℓ l'indicateur d'indisponibilité fortuite, qui vaut 0 ou 1,
- τ_p^ℓ le taux d'indisponibilité programmée, à valeur dans $[0, 1]$.

On rappelle que, pour un nœud $n \in \mathcal{O}$, $\tau(n)$ désigne le pas de temps de ce nœud.

La contrainte de satisfaction de la demande

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad \sum_{\ell \in \mathcal{L}} u^\ell(p) = \underbrace{\mathcal{D}(p)}_{\text{demande}}$$

Les contraintes de bornes et d'indisponibilité sur les unités de production thermique classique $\ell \in \mathcal{L}_{ThC}$

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad P_{\min}^\ell(p) \delta_f^\ell(p) \underbrace{\delta_i^\ell(p)}_{\substack{\text{imposition de} \\ \text{fonctionnement} \\ (\in \{0, 1\})}} \leq u^\ell(p) \leq P_{\max}^\ell \delta_f^\ell(p) \tau_p^\ell(p)$$

2. $\forall n \in \mathcal{O}, \quad \sum_{p \in \mathcal{P}_n} d(p) = 24$.

Les contraintes de bornes sur les groupes marchés $\ell \in \mathcal{L}_M$

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad P_{\min}^\ell(p) \leq u^\ell(p) \leq P_{\max}^\ell(p)$$

Les contraintes sur les unités de production thermique nucléaire $\ell \in \mathcal{L}_{ThN}$

– contrainte de prolongation maximale autorisée avant rechargement :

$$\forall t \in \{1, \dots, T\}, \quad x^\ell(t) \geq \underbrace{R_{\max}^\ell(t)}_{\substack{\text{prolongation} \\ \text{maximale } (< 0)}}$$

– loi de rechargement, à chaque pas de temps de rechargement $t \in \mathcal{T}_{rech.}^\ell$ de la tranche ℓ :

$$\forall t \in \mathcal{T}_{rech.}^\ell, \quad x^\ell(t) = \underbrace{L(t)}_{\substack{\text{volume de} \\ \text{recharge}}} + \underbrace{q^\ell(t)}_{\substack{\text{mode de} \\ \text{recharge} \\ (\in \{\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\})}} x^\ell(t-1)$$

– contrainte d'anticipation maximale :

$$\forall t \in \mathcal{T}_{rech.}^\ell, \quad x^\ell(t) \leq \underbrace{A_{\max}^\ell(t)}_{\substack{\text{anticipation} \\ \text{maximale } (> 0)}}$$

– contraintes de bornes et d'indisponibilités (fortuites et programmées) :

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad \text{si } t := \tau(n) \notin \mathcal{T}_{rech.}^\ell, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \\ P_{\min}^\ell \delta_f^\ell(t) \leq u^\ell(p) \leq P_{\max}^\ell \delta_f^\ell(t) \tau_p^\ell(t) \underbrace{\delta^\ell(x^\ell(t-1))}_{\substack{\text{profil de baisse} \\ \text{de puissance}^3}}$$

– loi de fonctionnement dynamique :

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad \text{si } t := \tau(n) \notin \mathcal{T}_{rech.}^\ell, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \\ x^\ell(t) = x^\ell(t-1) - \sum_{p \in \mathcal{P}_n(t)} \frac{1}{24P_{\max}^\ell} u^\ell(p) d(p)$$

Les contraintes sur les réserves hydrauliques $\ell \in \mathcal{L}_{RH}$

– contraintes de bornes sur le stock :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad X_{\min}^\ell(t) \leq x^\ell(t) \leq X_{\max}^\ell$$

– contrainte de dynamique de flot :

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad t := \tau(n), \quad x^\ell(t) = x^\ell(t-1) + \sum_{p \in \mathcal{P}_n} d(p) \underbrace{(\Phi^\ell(p))}_{\substack{\text{apports} \\ \text{naturels} \\ \text{en eau}}} - u^\ell(p)$$

3. Tant que le stock x reste en deçà du bore nul, $\delta^\ell(x) = 1$, puis $\delta^\ell(x) \in]0, 1]$.

Les contraintes sur les usines hydrauliques $\ell \in \mathcal{L}_H$

– contraintes de bornes sur les groupes de turbinage $g \in \mathcal{L}_{H_T}^\ell$:

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad t := \tau(n), \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad 0 \leq u^g(p) \leq P_{\max}^g \tau_p^g(t) \delta_f^g(t)$$

– contraintes de bornes et de rendement sur les groupes de pompage $g \in \mathcal{L}_{H_P}^\ell$:

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad t := \tau(n), \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad -P_{\max}^g \tau_p^g(t) \delta_f^g(t) \underbrace{\rho^g}_{\text{rendement}} \leq u^g(p) \leq 0$$

– contrainte de fonctionnement :

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad t := \tau(n), \quad u^\ell(t) = \underbrace{\text{dev}^\ell(t)}_{\text{puissance déversée}} + \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \sum_{g \in \mathcal{L}_{H_T}^\ell \cup \mathcal{L}_{H_P}^\ell} u^g(p)$$

Les contraintes sur les contrats tarifaires d'effacements $\ell \in \mathcal{L}_C$

– contrainte d'initialisation à chaque pas de temps de début d'application $t \in \mathcal{T}_{debContrat}^\ell$:

$$\forall t \in \mathcal{T}_{debContrat}^\ell, \quad x^\ell(t) = x_{init}^\ell$$

– contraintes de puissance et de disponibilité à chaque pas de temps d'application $t \in \mathcal{T}_{contrat}^\ell$ ⁴ :

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad \text{si } t := \tau(n) \in \mathcal{T}_{contrat}^\ell, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad u^\ell(p) \in \left\{ 0, P_{\max}^\ell \underbrace{\delta_c(p, \ell)}_{\substack{\text{disponibilité} \\ (\in \{0, 1\})}} \right\}$$

– contrainte de non utilisation en dehors des pas de temps d'application :

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad \text{si } t := \tau(n) \notin \mathcal{T}_{contrat}^\ell, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n, \quad u^\ell(p) = 0$$

– contrainte de borne sur le stock :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad X_{\min}^\ell(t) \leq x^\ell(t)$$

– contrainte d'évolution du stock :

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad t := \tau(n), \quad x^\ell(t+1) = x^\ell(t) - \sum_{p \in \mathcal{P}_n} u^\ell(p) d(p)$$

– contrainte de durée maximum :

$$\forall n \in \mathcal{O}, \quad \sum_{p \in \mathcal{P}_n, u^\ell(p) \neq 0} d(p) = \underbrace{N^\ell}_{\substack{\text{nombre d'heures} \\ \text{d'application}}}$$

8.1.2.4 Résolution

Le problème considéré étant de dimension très importante, il n'est pas envisageable de le résoudre de manière frontale. De ce fait, on simplifie d'une part la description des aléas en se restreignant à un sous-ensemble représentatif - un arbre de scénarios, et d'autre part, en ayant recours, pour le résoudre, à une méthode de décomposition-coordination, comme cela est décrit dans [Romanet, 2003a].

4. Cette contrainte induit la prise en compte de variables discrètes.

8.1.2.4.1 L'arbre d'aléas

Le rapport [Romanet, 2003c] décrit la méthode de construction des arbres d'aléas pour l'outil SOPRANO. En entrée de l'outil, on introduit des chroniques associées aux différents aléas affectant le problème. Ces chroniques sont croisées entre elles, de façon à former des scénarios regroupant, chacun, l'ensemble des informations sur les aléas. Ils sont ensuite agrégés en un arbre d'aléas. Pour effectuer cette agrégation des scénarios, on définit une « norme »⁵ représentative de la proximité de deux scénarios avant un certain pas de temps ; ainsi, deux scénarios très proches - au sens de cette norme - avant un pas de temps t sont considérés comme équivalents et sont regroupés au sein d'une même branche, et, par suite, on remplace les scénarios de chaque branche par un unique scénario représentatif. Des détails supplémentaires sur la construction des arbres d'aléas sont fournis au chapitre 3.

8.1.2.4.2 La décomposition-coordination

En chaque nœud de l'arbre, on relaxe la contrainte de demande qui couple entre elles les différentes unités de production, et on résout itérativement les sous-problèmes associés à chaque unité de production. La coordination des variables duales est effectuée par une méthode de faisceaux (présentée dans [Lemaréchal et Sagastizábal, 1995, Bacaud *et col.*, 2001]) ; à la convergence, la solution duale obtenue permet le calcul, par programmation dynamique, des valeurs d'usage des différentes unités.

Remarque : Au cours de la résolution, le groupe fictif supplémentaire de défaillance est remplacé par une borne supérieure des variables duales, dont la valeur est celle du coût proportionnel de ce groupe additionnel.

8.1.2.4.3 La résolution des sous-problèmes

Chaque sous-problème se rapporte à une unité de production spécifique. Ainsi, l'on peut adapter les méthodes de résolution des différents sous-problèmes à leurs caractéristiques propres. Par exemple, ceux qui sont liés à la gestion de réserves, tels que les sous-problèmes hydrauliques et nucléaires, sont résolus par programmation dynamique stochastique, tandis que l'on applique des techniques de programmation linéaire pour d'autres.

8.1.2.5 Utilisation des sorties

Les variables duales obtenues à la convergence représentent les prix d'équilibre du système production-consommation, c'est-à-dire les coûts marginaux de production.

Remarque : La solution duale obtenue n'est qu'approximative, car en général on n'obtient pas une convergence exacte de la méthode. De plus, même dans le cas d'une convergence exacte, la nature non convexe du problème induit un saut de dualité ; de ce fait, si les variables duales obtenues sont optimales (en termes de maximisation de la fonction duale), les variables primales associées ne satisfont pas nécessairement la contrainte d'équilibre offre-demande, si bien que les variables duales ne correspondent pas précisément aux coûts marginaux.

L'outil SOPRANO fournit en sortie les valeurs de Bellman associées à l'utilisation des différents stocks d'énergie ; ces valeurs de Bellman constituent des stratégies de gestion face aux aléas, puisqu'elles valorisent économiquement ces stocks à chaque instant. On les calcule après la convergence de la décomposition-coordination, en résolvant les sous-problèmes associés à chaque unité de production par programmation dynamique stochastique, et ce à partir des variables duales finales⁶. On obtient ainsi des valeurs de Bellman par niveau de stock et par nœud de l'arbre ; les fonctions de Bellman

5. Il ne s'agit pas d'une norme au sens mathématique.

6. Lors de cette étape, on utilise les variables duales, c'est-à-dire les coûts marginaux, comme coûts de rémunération de la production dans ces sous-problèmes.

sur chaque nœud de l'arbre sont alors calculées par interpolation linéaire. Enfin, une moyenne sur tous les nœuds d'un même pas de temps, pondérée par les probabilités de ces nœuds, fournit une fonction de Bellman à chaque pas de temps. Les dérivées de ces valeurs de Bellman constituent les valeurs d'usage des stocks.

Remarques :

1. On se place dans une logique de « hasard-décision » pour le calcul des valeurs de Bellman, c'est-à-dire que l'optimisation porte sur des commandes appliquées à l'instant suivant.
2. Les paliers thermiques classiques ne sont pas considérés comme des réserves d'énergie ; puisqu'ils ne nécessitent pas de stratégie de gestion, on n'en calcule pas les valeurs de Bellman associées.

8.2 Mise en œuvre

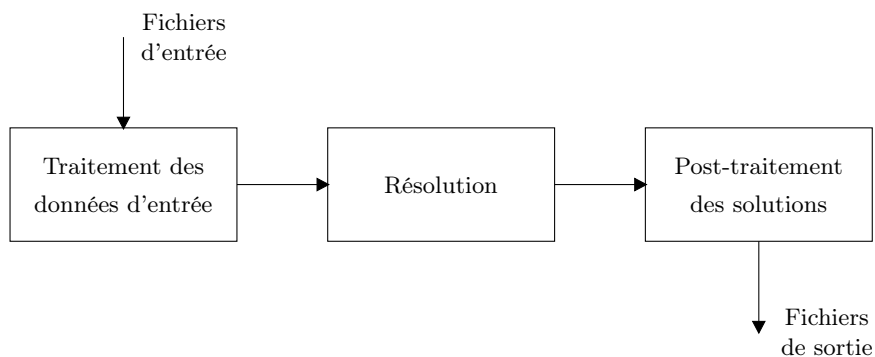
8.2.1 Exploitation d'une résolution frontale

8.2.1.1 Le modèle initial

Le modèle étudié au cours de cette thèse est une version simplifiée de l'outil SOPRANO, désignée « SOPRANO-REP »⁷. Cette version se distingue par le fait qu'elle ne prend pas en compte de réserves ni d'usines hydrauliques, et ne considère pas non plus les contrats tarifaires d'effacements. C'est en outre la version qui est utilisée par EDF de manière opérationnelle, chaque semaine, pour calculer les valeurs d'usage des tranches nucléaires.

La structure du code se décompose en trois parties, représentées à la figure 8.1 : une phase d'analyse et de mise en forme des données d'entrée, la résolution du problème, et un post-traitement des solutions.

FIGURE 8.1 – Architecture globale de SOPRANO-REP

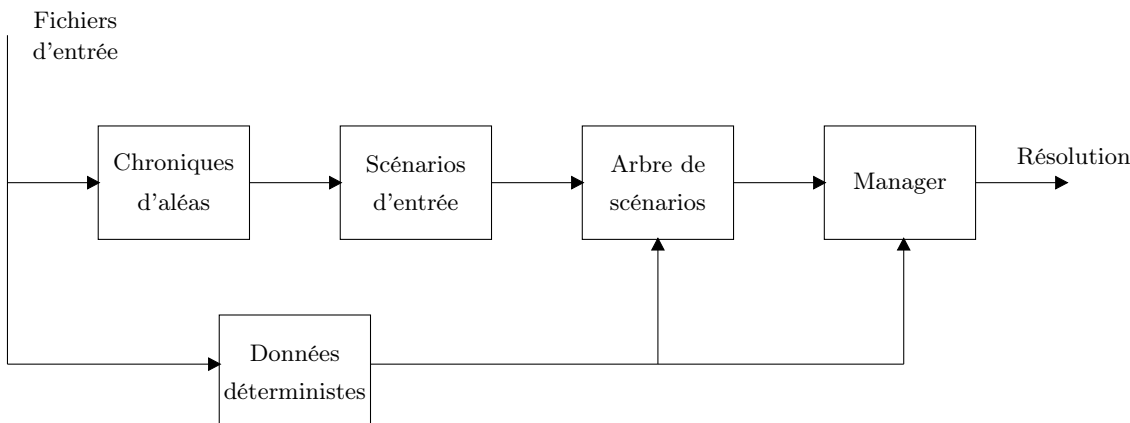


Comme cela a été évoqué au chapitre 2, certaines données d'entrées consistent en des chroniques d'aléas (comme la demande, les indisponibilités fortuites ou le prix et la profondeur du marché), qui sont regroupées pour constituer des scénarios. À partir de ces scénarios et des données déterministes (calendrier de la période d'étude, parc des unités de production, ...), un arbre de scénarios est construit, sur lequel une entité dénommée « Manager » opérera la résolution du problème. La figure 8.2 représente le pré-traitement des données d'entrée du modèle.

Remarque : L'arbre compte un nombre réduit de scénarios par rapport à l'ensemble initial, de manière à limiter le nombre de variables du problème à résoudre.

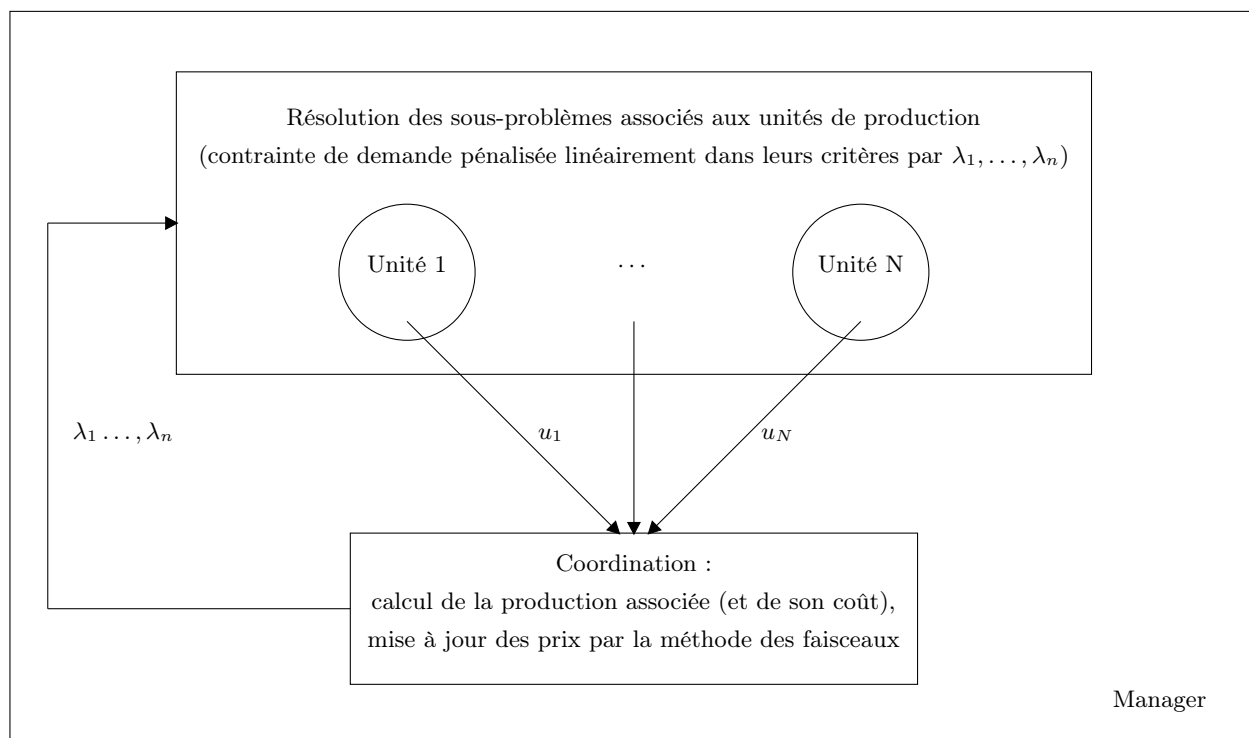
7. Les initiales « REP » sont l'acronyme de « réacteur à eau pressurisée », ce qui correspond à la filière de réacteurs nucléaires utilisés en France.

FIGURE 8.2 – Pré-traitement des données de SOPRANO-REP



L'entité Manager contient les sous-problèmes décomposés selon les différentes unités de production (après relaxation de la contrainte d'équilibre offre-demande qui couple entre elles ces unités), ainsi qu'un coordinateur. La résolution se fait de manière itérative. À chaque itération, les sous-problèmes sont résolus (en parallèle), de manière à obtenir une stratégie de production sur la période d'étude, ainsi qu'un coût inhérent. Ces stratégies sont coordonnées via la méthode des faisceaux qui fournit, pour chaque unité, un prix associé à la satisfaction de la contrainte de demande. Les prix calculés servent à mettre à jour les sous-problèmes, en leur permettant de s'approcher à chaque itération de l'équivalence au problème initial. Le schéma itératif de la résolution est présenté sur la figure 8.3.

FIGURE 8.3 – Résolution itérative des sous-problèmes de SOPRANO-REP



8.2.1.2 La résolution frontale

À l'occasion d'un stage, décrit dans le rapport [Faure-Miller, 2008], on s'est intéressé à une résolution frontale du problème, dans le but de valider les coûts marginaux calculés par l'outil SOPRANO. Plus précisément, il s'agissait de résoudre le problème posé sur l'arbre via un solveur - en l'occurrence CPLEX - sans effectuer de décomposition. Les résultats obtenus à l'issue de ce stage ont été satisfaisants, mais néanmoins limités par le nombre de variables du problème formulé sur l'arbre. Ainsi, il a été constaté qu'avec les ressources numériques à disposition, l'on ne pouvait pas résoudre le problème sur un arbre comportant plus de 2600 nœuds, ce qui correspond, pour une période d'étude de trois ans, à un arbre à seulement trois scénarios.

Des temps de calculs assez prometteurs ont également été constatés pour la résolution frontale sur un arbre ayant un unique scénario.

8.2.1.3 La décomposition scénario par scénario

8.2.1.3.1 Motivations

Les constats cités au paragraphe précédent ont constitué une première motivation pour l'implémentation d'une décomposition par scénarios. En outre, un tel choix de décomposition autorise la considération d'arbres beaucoup plus importants, c'est-à-dire comportant un grand nombre de scénarios, ce qui constitue a priori un enrichissement de la prise en compte des aléas, et donc du risque. Qui plus est, la contrainte de satisfaction de la demande ne nécessite plus d'être relaxée (puisque, dans ce cadre, elle ne couple pas entre elles des variables que l'on souhaite dissocier), ce qui garantit l'atteinte de l'équilibre offre-demande à chaque itération de l'algorithme.

8.2.1.3.2 Choix de l'algorithme

Il existe plusieurs méthodes appropriées à une décomposition par scénarios. Pour arbitrer laquelle implémenter, nous nous sommes inspirés d'une étude antérieure, décrite dans [Barty *et col.*, 2009, Chiche, 2009], s'attachant à comparer entre elles plusieurs de ces méthodes. En particulier, au cours de cette étude, ont été confrontés la méthode des faisceaux (exposée dans [Lemaréchal, 1978]), le principe du problème auxiliaire (révélé par [Cohen, 1980]), et l'algorithme du recouvrement progressif (issu de [Rockafellar et Wets, 1991]). Dans chaque cas, des résultats prometteurs et comparables en termes de temps de calcul et de précision du résultat ont été obtenus.

Nous avons choisi d'appliquer au problème considéré la méthode du recouvrement progressif, d'une part car il s'agit d'une méthode proximale spécifiquement adaptée à la décomposition par scénarios, et d'autre part car son paramétrage nous est apparu le plus aisé. Dans toute la suite, nous désignerons par « SOPRANO-scénarios » la nouvelle version de l'outil SOPRANO-REP dans laquelle la résolution est effectuée via une décomposition scénario par scénario.

8.2.1.3.3 Mise en œuvre

Nous avons souhaité réutiliser les développements effectués au cours du stage [Faure-Miller, 2008]. Ainsi, nous avons traité chaque scénario de l'arbre comme un « arbre déterministe » (c'est-à-dire à un seul scénario), auquel appliquer une résolution frontale. Une étape a alors été ajoutée à la phase de pré-traitement des données, de manière à transformer l'arbre de scénarios en un ensemble d'arbres à une seule branche, soumis à la contrainte de non-anticipativité, comme cela est présenté au paragraphe 6.2.2. Le pré-traitement des données pour l'outil SOPRANO-scénarios est décrit figure 8.4. La résolution itérative suit le schéma présenté figure 8.5.

8.2.2 Jeux de données utilisés

Pour effectuer nos tests numériques, nous disposons de trois jeux de données de tailles réalistes. Plus précisément, le premier jeu de données s'étend sur 10 semaines (entre février et avril 2008), le

FIGURE 8.4 – Pré-traitement des données de SOPRANO-scénarios

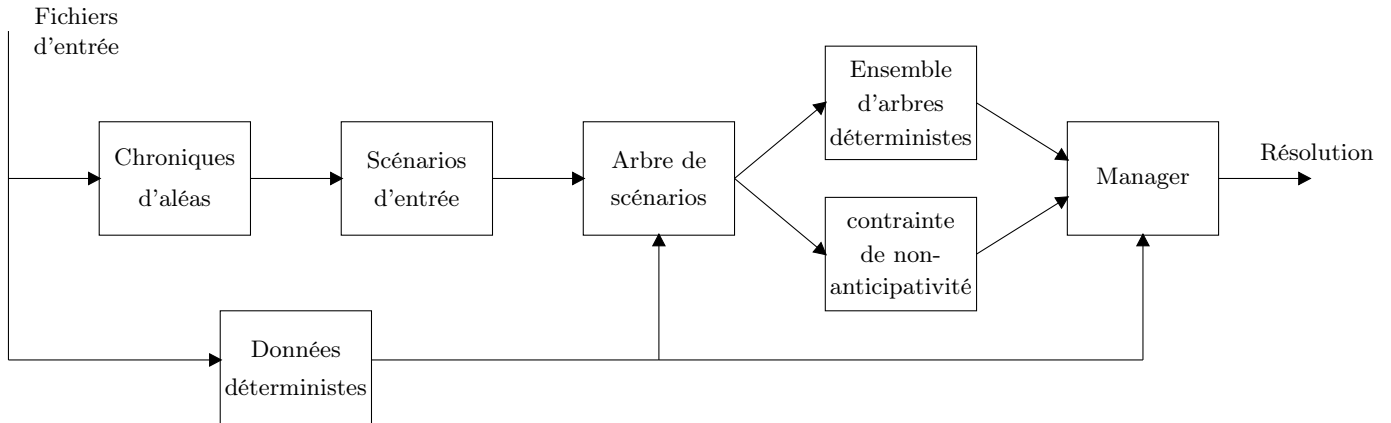
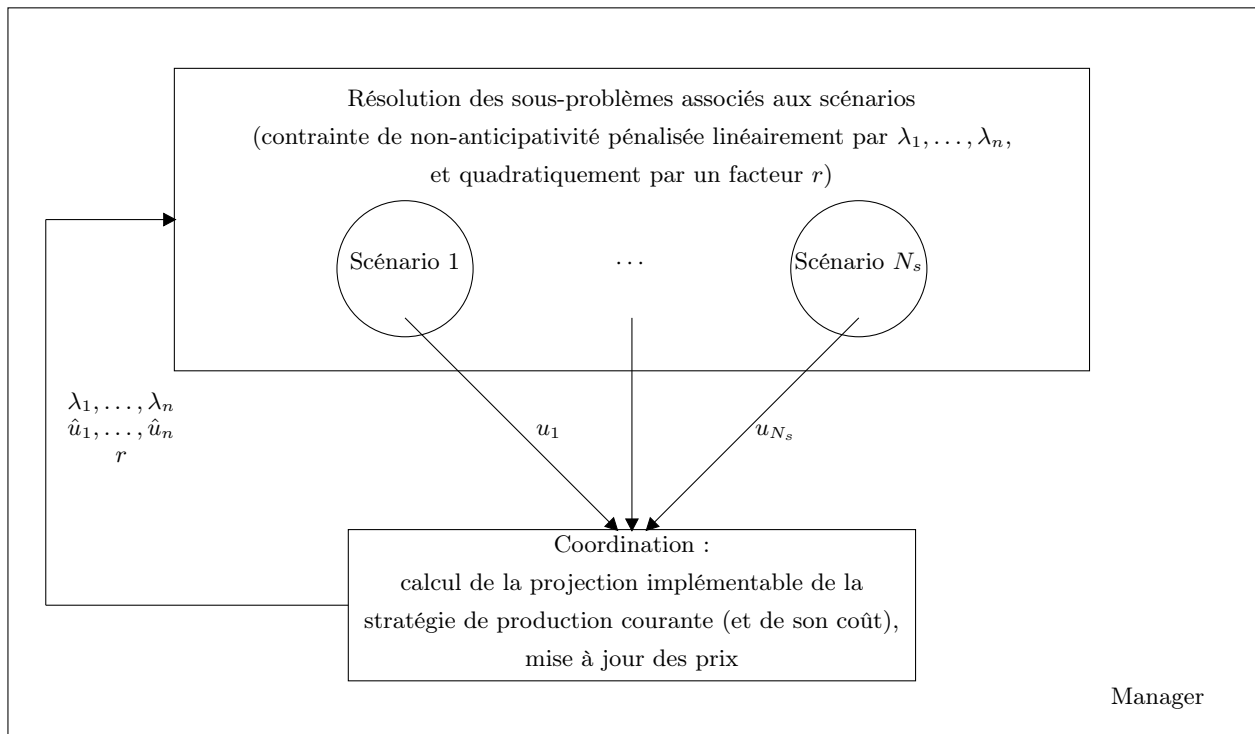


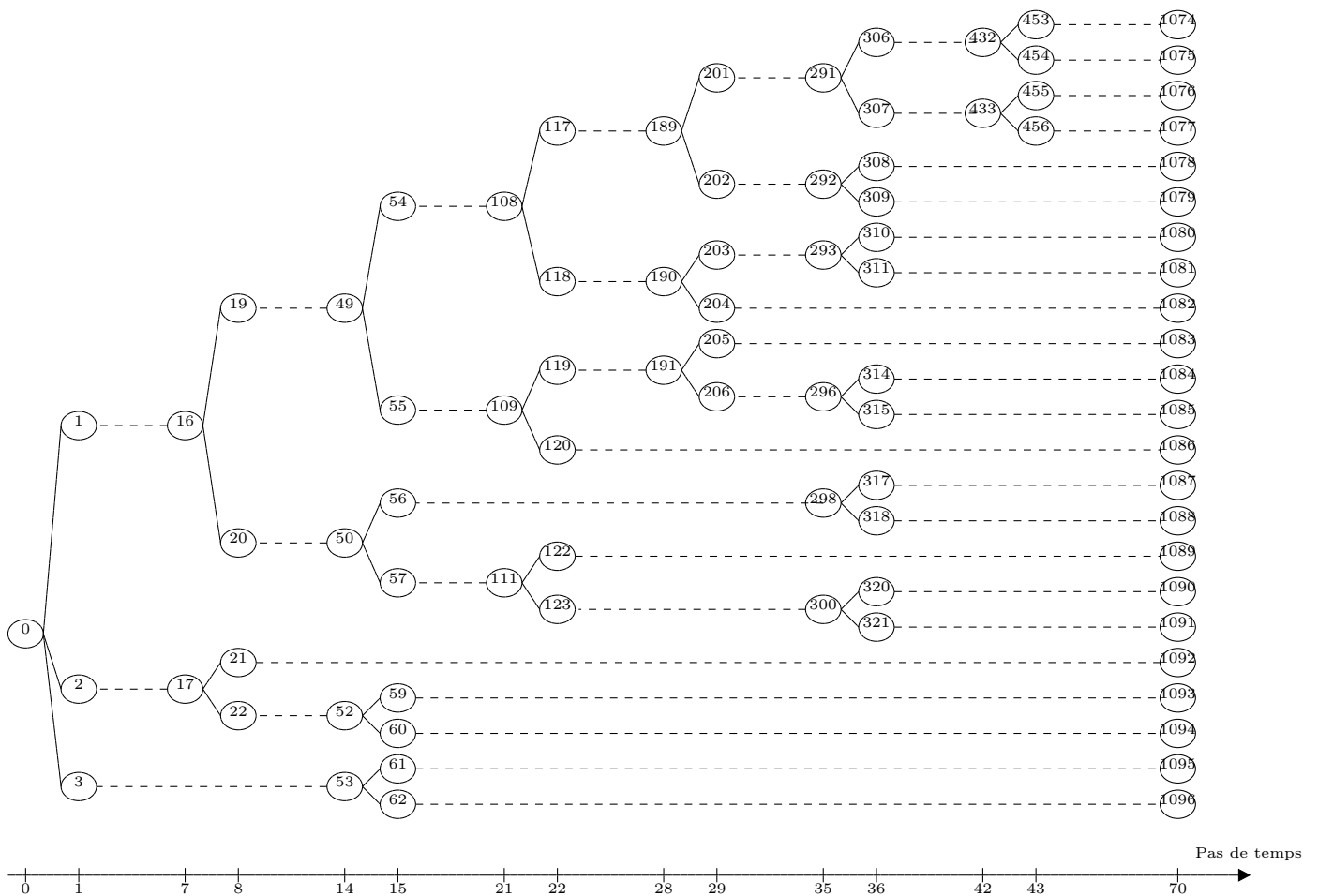
FIGURE 8.5 – Résolution itérative des sous-problèmes de SOPRANO-scénarios



deuxième sur 70 (d’avril 2007 à août de l’année suivante), et le troisième sur un peu plus de 3 ans (à partir de février 2008 jusqu’à mars 2011). Pour le jeu de données de la période d’étude la plus courte, chaque sous-problème associé à un scénario comporte 35 350 variables, tandis que les sous-problèmes correspondant aux scénarios du jeu de données de taille intermédiaire comptent 247 450 variables, et que ceux du jeu de données de durée la plus longue sont composés de 576 205 variables par scénario. *Remarque : Il est important de noter ici que les variables de chacun de ces problèmes sont de natures différentes (puisqu’elles correspondent à différents types d’unités de production), ce qui participe largement à la difficulté de résoudre des problèmes de cette envergure.*

Les arbres construits à partir de ces jeux de données sont extensibles « à volonté », en fonction d’un paramètre d’entrée - à fixer - correspondant à une approximation du nombre de nœuds requis. Par exemple, pour le « petit » jeu de données, nous avons travaillé avec des arbres à 10, 23 et 79 scénarios (une illustration de l’arbre à 23 scénarios du jeu de données de 10 semaines sur lequel on a travaillé est fournie figure 8.6). Pour les jeux de données de périodes d’études plus étendues, nous avons d’abord travaillé avec des arbres comportant un nombre réduit de scénarios (14 pour celui de 70 semaines et 3 pour celui de 3 ans). Les tests préliminaires ont été effectués avec le plus petit de

FIGURE 8.6 – Arbre à 23 scénarios (1097 nœuds) pour le jeu de données de 10 semaines



ces jeux de données, pour des raisons de rapidité d’obtention des résultats numériques. Par la suite, nous avons également travaillé avec les deux jeux de données de périodes plus étendues.

8.2.3 Précisions techniques

Les tests décrits ci-dessous ont été effectués sous Linux (version 2.2.26-2) 64 bits. Les sous-problèmes de l'algorithme du recouvrement progressif ont été résolus par le solveur CPLEX (version 11.210).

Pour valider les résultats numériques obtenus, nous avons adopté comme méthode étalon celle de la résolution frontale sur l'ensemble de l'arbre. Cette résolution frontale était également effectuée par le solveur CPLEX. Cependant, comme cela est souligné par [Faure-Miller, 2008], une telle approche est limitante pour la taille de l'arbre de scénarios sur lequel on souhaite résoudre le problème. Plus précisément, avec les outils informatiques utilisés au cours de cette étude, l'arbre de scénarios était limité à environ 2500 à 3000 nœuds (en effet, il y a de l'ordre de 500 variables et 1100 contraintes à chaque nœud). C'est la raison pour laquelle nous avons réalisé les premiers tests numériques sur des arbres comportant un nombre réduit de nœuds (c'est-à-dire soit une période d'étude relativement courte, soit assez peu de scénarios). Plus précisément, pour le petit jeu de données, les arbres considérés étaient constitués au maximum de 79 scénarios (soit 3070 nœuds), pour le jeu de données intermédiaires, les arbres ne pouvaient comporter plus de 14 scénarios (soit 2525 nœuds), et pour le jeu de données le plus important, nous n'avons pas étudié d'arbres possédant plus de 3 scénarios (soit 2408 nœuds).

8.3 Écriture réduite du problème

Dans cette section, nous réécrivons le problème (présenté en détails à la section 8.1) de manière simplifiée, par souci de clarté des considérations numériques à suivre. En outre, dans l'écriture, on ne fera plus la distinction entre les pas de temps et les postes horaires.

8.3.1 Problème primal

On note $U = (u_1, \dots, u_{N_S})$ le vecteur des variables de production associées à chaque scénario. Chaque u_s est également un vecteur $u_s = u_{s,1}, \dots, u_{s,T}$ de productions à chaque pas de temps. De même, chaque $u_{s,t}$ contient les commandes $u_{s,t,\ell}$ de toutes les unités de production $\ell \in \mathcal{L}$.

Pour chaque scénario $s \in \mathcal{S}$, on note \mathcal{C}_s l'ensemble admissible contenant toutes les contraintes liées au fonctionnement des centrales. Il s'agit des contraintes décrites au paragraphe 8.1.2.3.3, à l'exception de celle relative à la satisfaction de l'équilibre offre-demande. Le problème primal s'écrit de la manière suivante.

$$\begin{cases} \inf_{U,X} \sum_{s \in \mathcal{S}} \pi_s f_s(u_s, x_s), \\ \forall s \in \mathcal{S}, (u_s, x_s) \in \mathcal{C}_s, & \text{[ensemble des contraintes physiques]} \\ \forall s \in \mathcal{S}, \forall t \in \{1, \dots, T\}, \sum_{\ell \in \mathcal{L}} u_{s,t,\ell} = \mathcal{D}_{s,t}, & \text{[contrainte d'équilibre offre-demande]} \\ KU = 0. & \text{[contrainte de non-anticipativité]} \end{cases} \quad (8.1)$$

8.3.2 Problème dual associé à la relaxation de la contrainte d'équilibre offre-demande

Un des objectifs industriels de la résolution de ce problème est la connaissance à chaque pas de temps (notamment ceux de la première semaine de la période d'étude) des coûts marginaux de l'électricité, c'est-à-dire du prix que coûterait la production d'1 MW d'électricité supplémentaire, compte tenu des stratégies de gestion obtenues. Comme nous l'avons déjà souligné au chapitre 2, il sont plus précisément obtenus par détermination des multiplicateurs optimaux associés à la relaxation de l'équilibre offre-demande.

Le problème dual associé à la relaxation de la contrainte de satisfaction de la demande s'écrit :

$$\inf_{\mu \in \mathbb{R}^{TN_s}} \delta(\mu), \quad (8.2)$$

où δ est une fonction duale du problème, définie par :

$$\delta : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{TN_s} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mu \mapsto \end{array} \left\{ \begin{array}{l} - \inf_{U, X} \sum_{s \in \mathcal{S}} [\pi_s f_s(u_s, x_s) + \sum_{t=0}^T \mu_{s,t} (\sum_{\ell \in \mathcal{L}} u_{s,t,\ell} - \mathcal{D}_{s,t})], \\ \forall s \in \mathcal{S}, (u_s, x_s) \in \mathcal{C}_s. \end{array} \right. \quad (8.3)$$

8.4 Première implémentation et évolutions

8.4.1 Version initiale de l'algorithme

8.4.1.1 Non-anticipativité des variables de stock à partir de celle des variables de production

Étant donné les contraintes dynamiques gouvernant les variables de stock x_s , la non-anticipativité de ces variables est une conséquence directe de celle des variables de production u_s . En effet, en un pas de temps t donné et pour un scénario s , elles peuvent se réécrire comme une dépendance affine des stocks en les productions des instants précédents :

$$x_{s,t} = x_{s,0} + \sum_{i=0}^{t-1} \alpha_i u_{s,i}.$$

Ainsi, si deux scénarios s et s' sont indiscernables à t , ils le sont également pour tous les pas de temps précédents (étant donné la définition 3.4 d'un arbre de scénarios, fournie au chapitre 3). Si les variables de production u sont non anticipatives, elles sont donc confondues pour ces scénarios à tous les pas de temps antérieurs à t . En outre, l'initialisation du stock est une donnée du problème sur l'arbre et est par nature non anticipative. On en déduit la non-anticipativité des variables de stock.

C'est la raison pour laquelle on n'impose pas, dans le problème considéré, une telle contrainte à ces variables.

8.4.1.2 Description

Algorithme 5 (Recouvrement progressif appliqué à SOPRANO-scénarios)

1. Initialisation :

- $k = 0$;
- $\forall s \in \mathcal{S}, (u_s^0, x_s^0)$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(u_s, x_s) \in \mathcal{C}_s} f_s(u_s, x_s), \\ \forall t \in \{1, \dots, T\}, \sum_{\ell \in \mathcal{L}} u_{s,t,\ell} = \mathcal{D}_{s,t} ; \end{array} \right.$$

- $\lambda^0 = 0$.

2. Calcul de la projection implémentable de l'itéré courant :

- $\hat{U}^k = JU^k$.

3. Mise à jour de l'itéré courant :

- $\forall s \in \mathcal{S}, (u_s^{k+1}, x_s^{k+1})$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(u_s, x_s) \in \mathcal{C}_s} f_s(u_s, x_s) + \lambda_s^{k\top} u_s + \frac{r}{2} \|u_s - \hat{u}_s^k\|_2^2, \\ \forall t \in \{1, \dots, T\}, \sum_{\ell \in \mathcal{L}} u_{s,t,\ell} = \mathcal{D}_{s,t}. \end{array} \right.$$

4. Mise à jour des multiplicateurs :
 - $\lambda^{k+1} = \lambda^k + r(U^{k+1} - \hat{U}^{k+1})$.
5. Vérification du critère d'arrêt $\|U^{k+1} - \hat{U}^{k+1}\|_2 \approx 0$:
 - si le critère n'est pas satisfait, $k \leftarrow k + 1$, et on retourne à l'étape 2 ;
 - sinon, l'algorithme s'arrête et fournit (U^{k+1}, X^{k+1}) comme solution implémentable et admissible.

8.4.1.3 Résultats

Dans un premier temps, nous avons étudié le comportement de l'algorithme appliqué à ce problème, avec le jeu de données de 10 semaines, pour l'arbre décrit figure 8.6 (qui comporte 23 scénarios et 1097 nœuds). Comme nous n'avions pas de connaissance a priori des facteurs de pénalisation permettant une convergence rapide de l'algorithme, nous avons testé 45 valeurs de ce paramètre, couvrant une plage allant de 10 à 10^{10} (plus précisément, nous avons fait évoluer les paramètres comme une suite géométrique de raison 1.6). Nous avons fixé à 100 le nombre maximal d'itérations à effectuer et avons requis une précision relative de 10^{-4} pour satisfaire le critère d'arrêt. Les résultats obtenus sont présentés sur les graphiques de la figure 8.7.

On observe que l'algorithme converge en moins de 100 itérations pour des facteurs de pénalisation compris entre $2 \cdot 10^3$ et $5 \cdot 10^7$. Pour les valeurs supérieures, il semble que l'ordre de grandeur du paramètre soit trop élevé par rapport à celui du critère minimisé, ce qui induit d'importantes erreurs numériques.

Plus précisément, nous avons analysé la vitesse de convergence vers 0 de la norme de la contrainte de non-anticipativité - dont l'annulation est, à ce stade, le critère d'arrêt de l'algorithme - pour un paramètre de pénalisation trop petit, et un second permettant d'obtenir la convergence de l'algorithme en moins de 100 itérations. Ces vitesses de convergence sont représentées sur la figure 8.8. On constate ainsi que, pour un facteur de pénalisation trop faible, la norme de la contrainte décroît relativement lentement puis, au bout de 40 itérations, oscille autour d'une valeur sans descendre en deçà de 10^{-3} . Pour un facteur de pénalisation plus élevé, mais n'induisant pas d'erreurs numériques, on observe des paliers de décroissance assez rapide de la contrainte, avec cependant de fortes oscillations ponctuelles. Ces fortes oscillations expliquent les deux pics (vers le bas) de la courbe représentative du nombre d'itérations requis pour converger de la figure 8.7 ; en effet, il suffit que l'oscillation de la norme de la contrainte se produise juste après l'atteinte de la précision imposée pour converger, pour obtenir une réduction considérable, mais hasardeuse, du nombre d'itérations nécessaires.

8.4.2 Changements de variables

8.4.2.1 Mise à l'échelle

En outre, on constate également sur la figure 8.7 que, pour les valeurs de l'intervalle où l'on converge sans erreur numérique, le nombre d'itérations est assez élevé (toujours supérieur à 60). Nous avons supposé que ce comportement relativement lent de l'algorithme pouvait être dû aux différences importantes d'ordres de grandeur entre les différentes variables de production. La « production » d'électricité associée aux achats sur les marchés de l'énergie, celle fournie par des centrales thermiques à flamme et celle d'origine nucléaire présentent en effet des capacités de dimensions tout à fait différentes. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'effectuer une mise à l'échelle de ces différentes variables.

Ainsi, dans l'expression de la contrainte de non-anticipativité, nous avons divisé chaque variable par l'écart entre sa valeur maximale et sa valeur minimale.

Remarques :

8.4. PREMIÈRE IMPLÉMENTATION ET ÉVOLUTIONS

FIGURE 8.7 – Comportement du recouvrement progressif, dans sa version initiale, sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines, en fonction du paramètre de pénalisation choisi, avec une précision de 10^{-4}

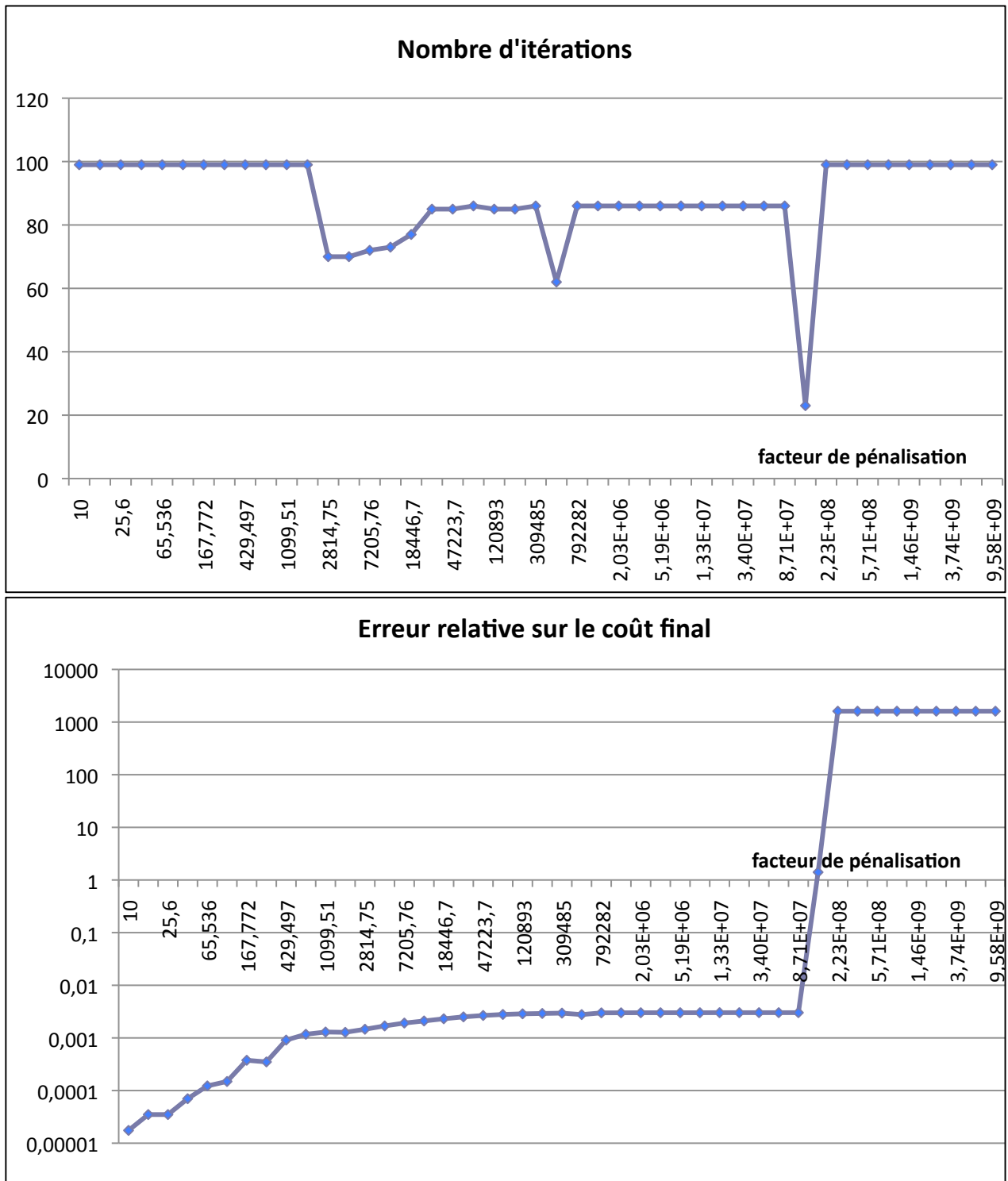
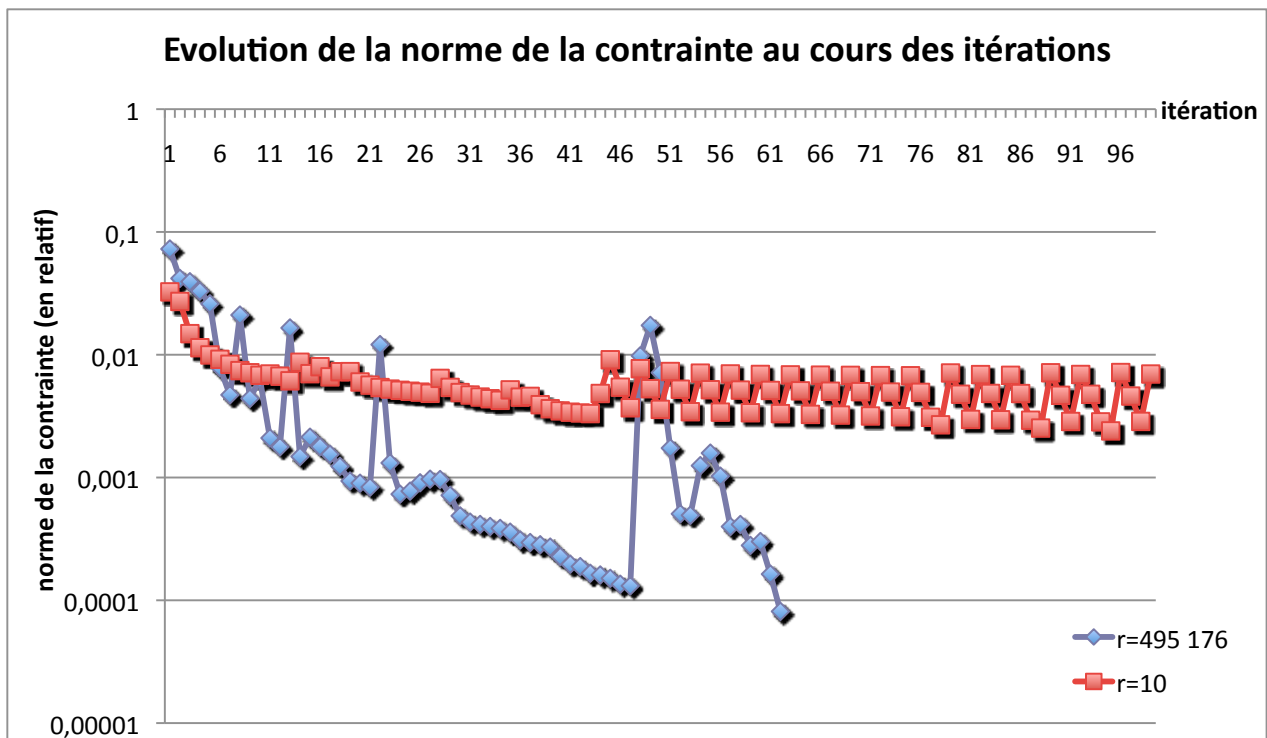


FIGURE 8.8 – Vitesse de convergence vers 0 de la contrainte de non-anticipativité au cours de l'exécution du recouvrement progressif, dans sa version initiale, sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines



1. Cet écart entre les bornes supérieure et inférieure d'une variable dépend du nœud de l'arbre en lequel se trouve la variable, donc du pas de temps et du scénario associés.
2. Nous n'avons pas effectué cette opération pour les variables de production dont la valeur était imposée (c'est-à-dire celles pour lesquelles, à un pas de temps et pour un scénario donnés la puissance maximale est égale à la puissance minimale). En effet, pour ces variables, la contrainte de non-anticipativité est toujours vérifiée puisque, en un même nœud, les contraintes sont toutes identiques.

Cette mise à l'échelle revient à multiplier la contrainte de non-anticipativité $KU = 0$ par une matrice diagonale Δ (définie d'abord sur l'arbre, puis étendue sur le peigne), et ainsi à dualiser une nouvelle contrainte : $\Delta KU = 0$. Or, d'après le lemme 7.10 démontré au chapitre 7, la matrice Δ commute avec J , donc avec K . Ainsi, la contrainte de non-anticipativité mise à l'échelle peut s'écrire

$$K\Delta U = 0.$$

Pour chaque scénario $s \in \mathcal{S}$, on note Δ_s le bloc diagonal de Δ correspondant aux indices se rapportant au scénario s . L'algorithme mis en œuvre devient alors le suivant.

Algorithme 6 (Recouvrement progressif appliqué à SOPRANO-scénarios, avec mise à l'échelle)

1. Initialisation :

- $k = 0$;
- $\forall s \in \mathcal{S}$, (u_s^0, x_s^0) est solution de

$$\begin{cases} \min_{(u_s, x_s) \in \mathcal{C}_s} f_s(u_s, x_s), \\ \forall t \in \{1, \dots, T\}, \sum_{\ell \in \mathcal{L}} u_{s,t,\ell} = \mathcal{D}_{s,t}; \end{cases}$$

- $\lambda^0 = 0$.

2. Calcul de la projection implémentable de l'itéré courant :

- $\hat{U}^k = JU^k$.

3. Mise à jour de l'itéré courant :

- $\forall s \in \mathcal{S}$, (u_s^{k+1}, x_s^{k+1}) est solution de

$$\begin{cases} \min_{(u_s, x_s) \in \mathcal{C}_s} f_s(u_s, x_s) + \lambda_s^{k\top} \Delta_s u_s + \frac{r}{2} \|\Delta_s (u_s - \hat{u}_s^k)\|_2^2, \\ \forall t \in \{1, \dots, T\}, \sum_{\ell \in \mathcal{L}} u_{s,t,\ell} = \mathcal{D}_{s,t}. \end{cases}$$

4. Mise à jour des multiplicateurs :

- $\lambda^{k+1} = \lambda^k + r\Delta(U^{k+1} - \hat{U}^{k+1})$.

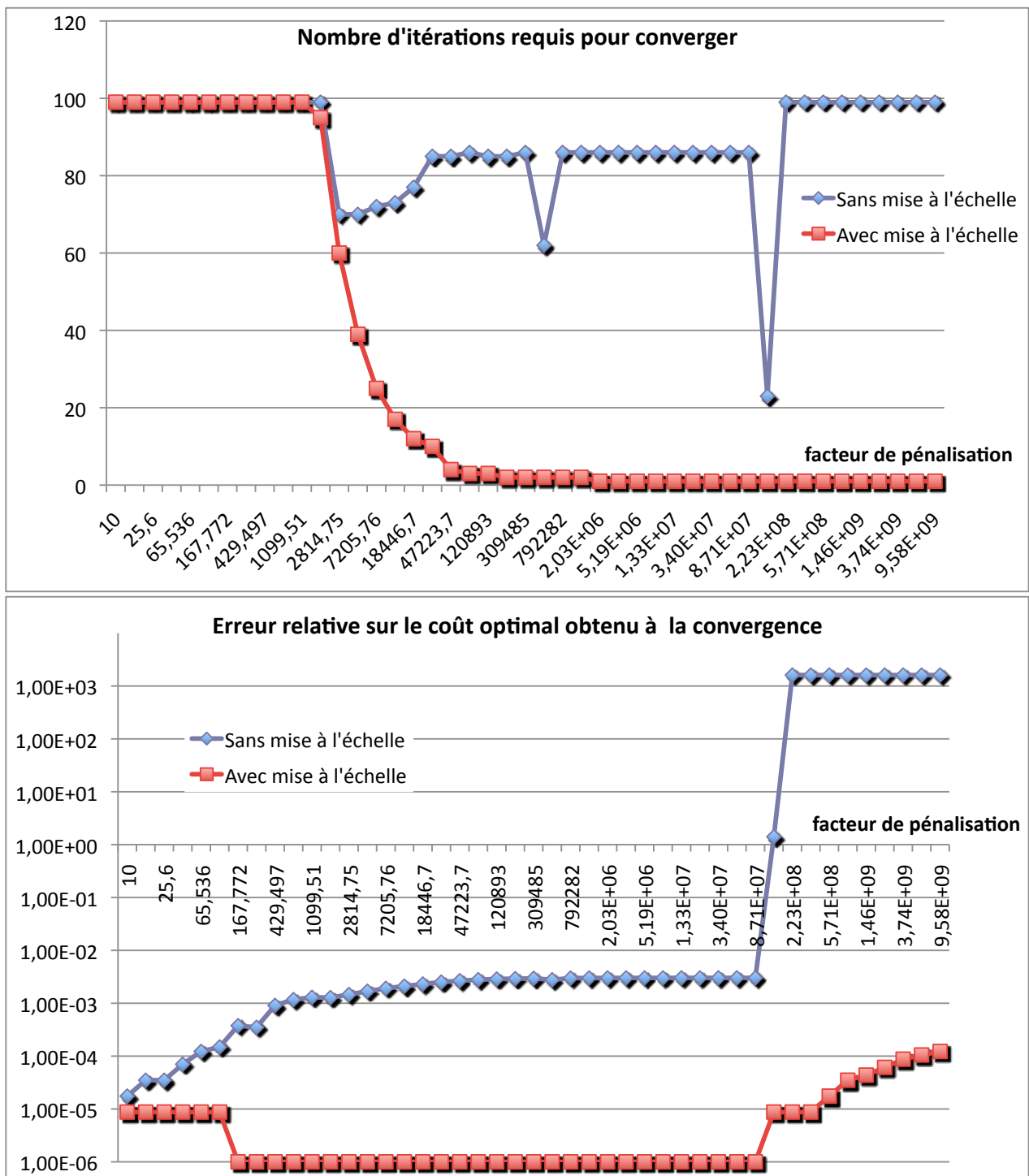
5. Vérification du critère d'arrêt $\|\Delta(U^{k+1} - \hat{U}^{k+1})\|_2 \approx 0$:

- si le critère n'est pas satisfait, $k \leftarrow k + 1$, et on retourne à l'étape 2 ;
- sinon, l'algorithme s'arrête et fournit (U^{k+1}, X^{k+1}) comme solution implémentable et admissible.

Cette nouvelle version de l'algorithme fournit les résultats présentés figure 8.9. On y constate une importante réduction du nombre d'itérations requis pour converger sur une grande partie de la plage des facteurs de pénalisation considérés (tous ceux supérieurs à $3 \cdot 10^3$). En outre, la précision obtenue sur le coût optimal est nettement meilleure dans tous les cas.

Nous avons également mis en évidence sur la figure 8.10 que la mise à l'échelle permettait de lisser nettement la courbe représentative de l'évolution de la norme de la contrainte de non-anticipativité au cours des itérations. Plus précisément, nous avons comparé, dans le cas de l'application de la mise à l'échelle des variables, les vitesses de convergence de la norme de la contrainte pour plusieurs paramètres. Nous avons ainsi constaté à la lecture de la figure 8.11 que la pente de la courbe représentative de cette vitesse était d'autant plus importante que le facteur de pénalisation choisi était élevé.

FIGURE 8.9 – Comportement du recouvrement progressif avec mise à l'échelle des variables sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines, en fonction du paramètre de pénalisation choisi, avec une précision de 10^{-4}



8.4. PREMIÈRE IMPLÉMENTATION ET ÉVOLUTIONS

FIGURE 8.10 – Vitesse de convergence vers 0 de la contrainte de non-anticipativité au cours de l'exécution du recouvrement progressif (dans sa version initiale et avec mise à l'échelle) pour un facteur de pénalisation $r = 10$, sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines

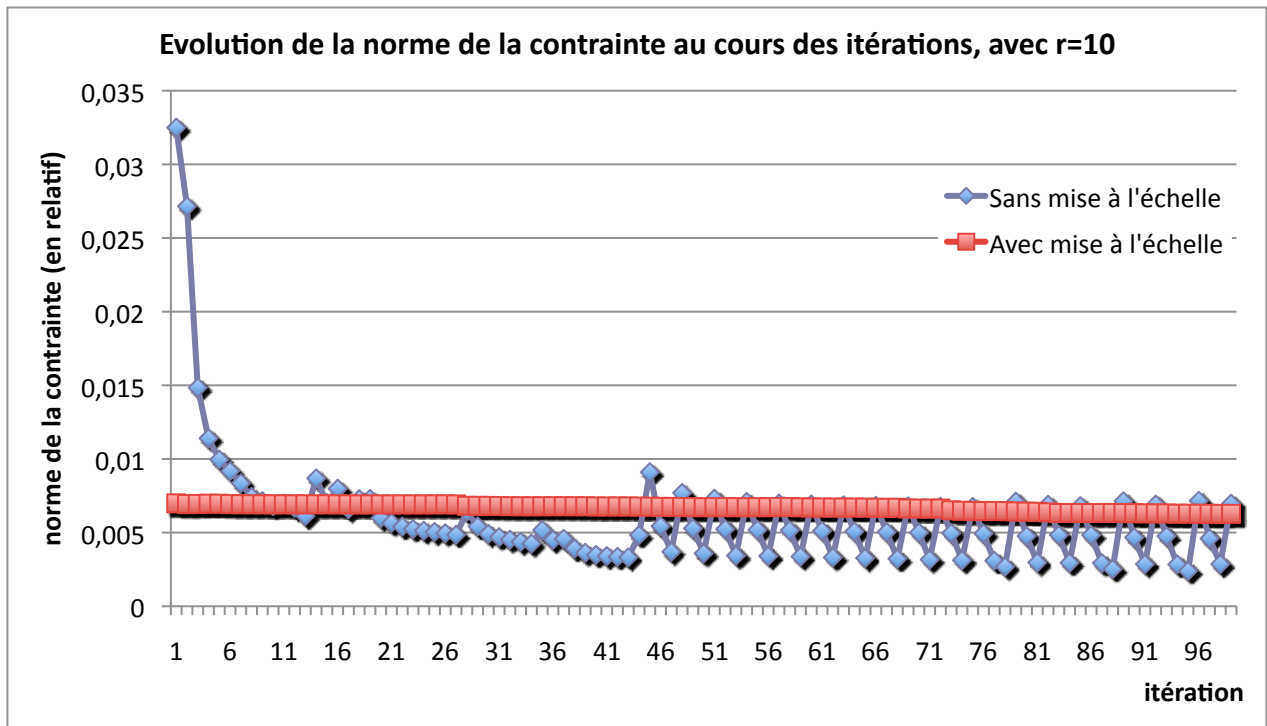
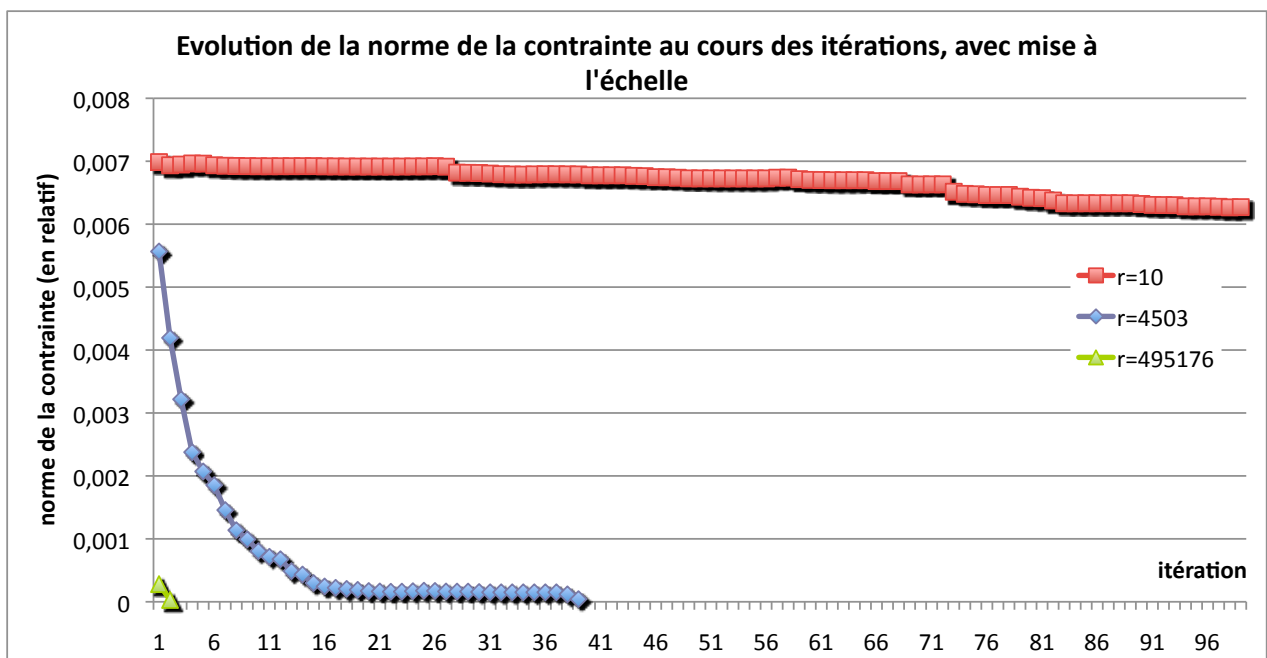


FIGURE 8.11 – Vitesse de convergence vers 0 de la contrainte de non-anticipativité au cours de l'exécution du recouvrement progressif (avec mise à l'échelle), sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines



8.4.2.2 Translation

Cependant, nous avons constaté sur la figure 8.9 une diminution de la précision obtenue sur le coût optimal lorsque le facteur de pénalisation était choisi supérieur à 10^8 . Une interprétation possible de ce comportement est que le terme quadratique du critère des sous-problème, lorsque r est très grand, devient largement prépondérant devant leur terme linéaire. Plus précisément, les sous-problèmes résolus à chaque itération de l'étape 3 de l'algorithme 6 s'écrivent :

$$\begin{cases} \min_{(u_s, x_s) \in \mathcal{C}_s} f_s(u_s, x_s) + \lambda_s^{k\top} \Delta_s u_s + \frac{r}{2} \|\Delta_s(u_s - \hat{u}_s^k)\|_2^2, \\ \forall t \in \{1, \dots, T\}, \sum_{\ell \in \mathcal{L}} u_{s,t,\ell} = \mathcal{D}_{s,t}. \end{cases}$$

Cependant, lors de l'implémentation de l'algorithme, ce que l'on fournit au solveur, en supplément des différentes contraintes, n'est pas réellement une fonction à minimiser, mais les parties linéaire et quadratique de ce critère. La partie linéaire correspond ainsi au vecteur définissant f_s (qui est elle-même, dans ce cadre, linéaire), auquel on ajoute $\Delta_s \lambda_s - r \Delta_s^2 \hat{u}_s^k$. La partie quadratique est quant à elle la matrice $\frac{r}{2} \Delta_s^2$.

Pour éviter que, lorsque r devient grand, le terme quadratique ne prenne trop d'importance par rapport au critère que l'on souhaite « vraiment » minimiser, nous avons alors opéré le changement de variable suivant :

$$v_s = u_s - \hat{u}_s^k.$$

Suite à cette transformation, les sous-problèmes résolus à chaque itération de l'algorithme deviennent (avec $\tilde{\mathcal{C}}_s$ l'ensemble translaté des contraintes liées au fonctionnement) :

$$\begin{cases} \min_{(v_s, x_s) \in \tilde{\mathcal{C}}_s} f_s(v_s + \hat{u}_s^k, x_s) + \lambda_s^{k\top} \Delta_s(v_s + \hat{u}_s^k) + \frac{r}{2} \|\Delta_s v_s\|_2^2, \\ \forall t \in \{1, \dots, T\}, \sum_{\ell \in \mathcal{L}} (v_{s,t,\ell} + \hat{u}_{s,t,\ell}^k) = \mathcal{D}_{s,t}. \end{cases}$$

Comme f_s est linéaire, le sous-problème effectivement résolu par le solveur est en réalité :

$$\begin{cases} \min_{(v_s, x_s) \in \tilde{\mathcal{C}}_s} f_s(v_s, x_s) + \lambda_s^{k\top} \Delta_s v_s + \frac{r}{2} \|\Delta_s v_s\|_2^2, \\ \forall t \in \{1, \dots, T\}, \sum_{\ell \in \mathcal{L}} (v_{s,t,\ell} + \hat{u}_{s,t,\ell}^k) = \mathcal{D}_{s,t}. \end{cases}$$

Nous avons représenté sur la figure 8.12 l'amélioration que l'on obtient sur l'erreur du coût optimal. On y observe que les courbes sont confondues jusqu'au paramètre « limite » à partir duquel on constatait une perte de précision dans la version précédente de l'algorithme. On remarque alors que la translation des variables permet d'élargir quelque peu la plage des facteurs de pénalisation donnant lieu à une bonne précision et que, au delà de cet intervalle, l'erreur est également amoindrie. *Remarque :* Nous n'avons pas affiché ici la courbe représentative du nombre d'itérations de l'algorithme avec translation des variables, car cette opération ne modifie pas le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence.

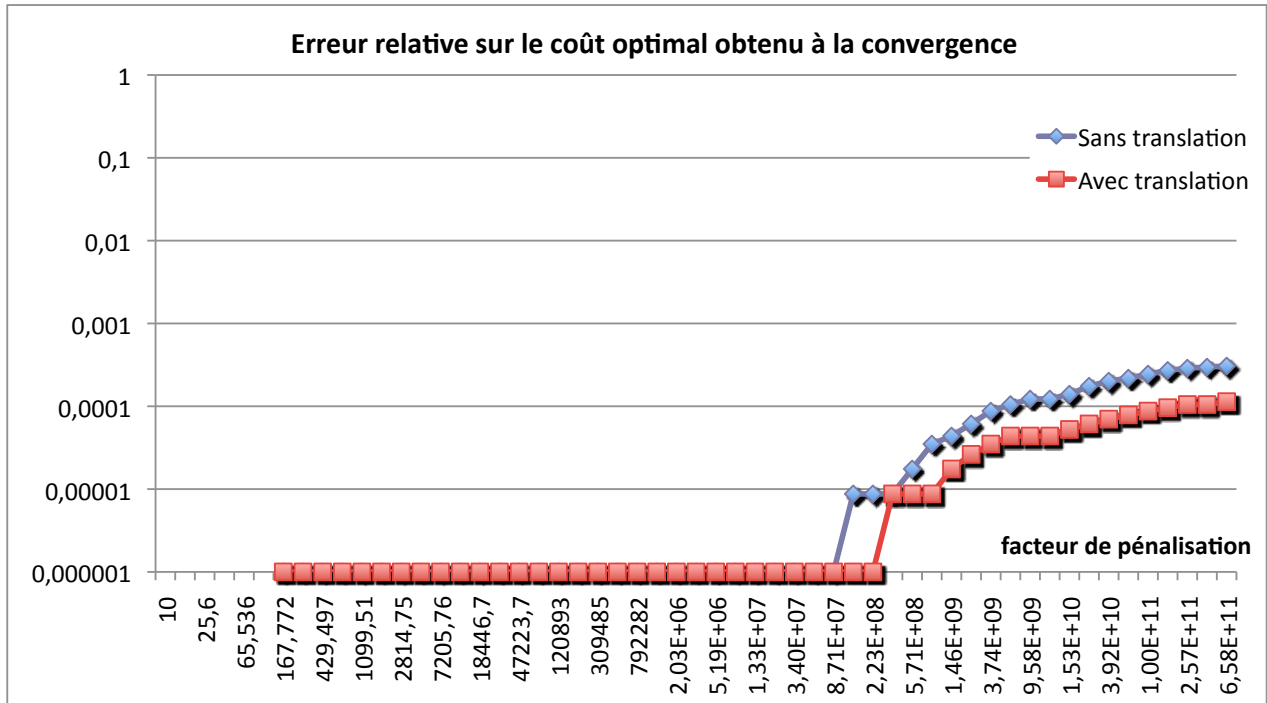
8.4.3 Ajout d'un test d'arrêt

Malgré les améliorations décrites aux paragraphes précédents, l'on constate que, lorsqu'un facteur de pénalisation trop élevé est choisi, l'algorithme s'arrête prématurément en une solution non anticipative, mais qui ne minimise pas le critère. Ce phénomène a déjà été constaté par de nombreux auteurs, comme nous l'avons souligné au paragraphe 6.6.2.

Cependant, le résultat de [Rockafellar et Wets, 1991] cité au paragraphe 6.5.3 (théorème 6.18) assure la convergence vers 0 de la somme de la norme de la contrainte et de la norme de la différence de deux projections successives des itérés primaux. En outre, comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe 6.4.2, les comportements opposés de ces deux termes ont été mis au jour par l'interprétation de l'algorithme en termes de recherche de points-selles. En effet, la proposition 6.11 exprime

8.5. COMPARAISON DES COÛTS MARGINAUX PAR RAPPORT À CEUX ISSUS DU MODÈLE INITIAL

FIGURE 8.12 – Comportement du recouvrement progressif avec mise à l'échelle et translation des variables sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines, en fonction du paramètre de pénalisation choisi, avec une précision de 10^{-4}



qu'à chaque itération, l'algorithme du recouvrement progressif calcule le point-selle d'une fonction convexe-concave, dont le terme quadratique convexe correspond à l'évolution de l'itéré primal multiplié par r , et dont le terme quadratique concave coïncide avec l'évolution de l'itéré dual, multiplié quant à lui par $1/r$. Le fait que les facteurs multiplicatifs de ces termes soient inverses l'un de l'autre justifie ainsi qu'un r élevé favorise la progression duale, tandis qu'un r proche de 0 privilégie une avancée primale.

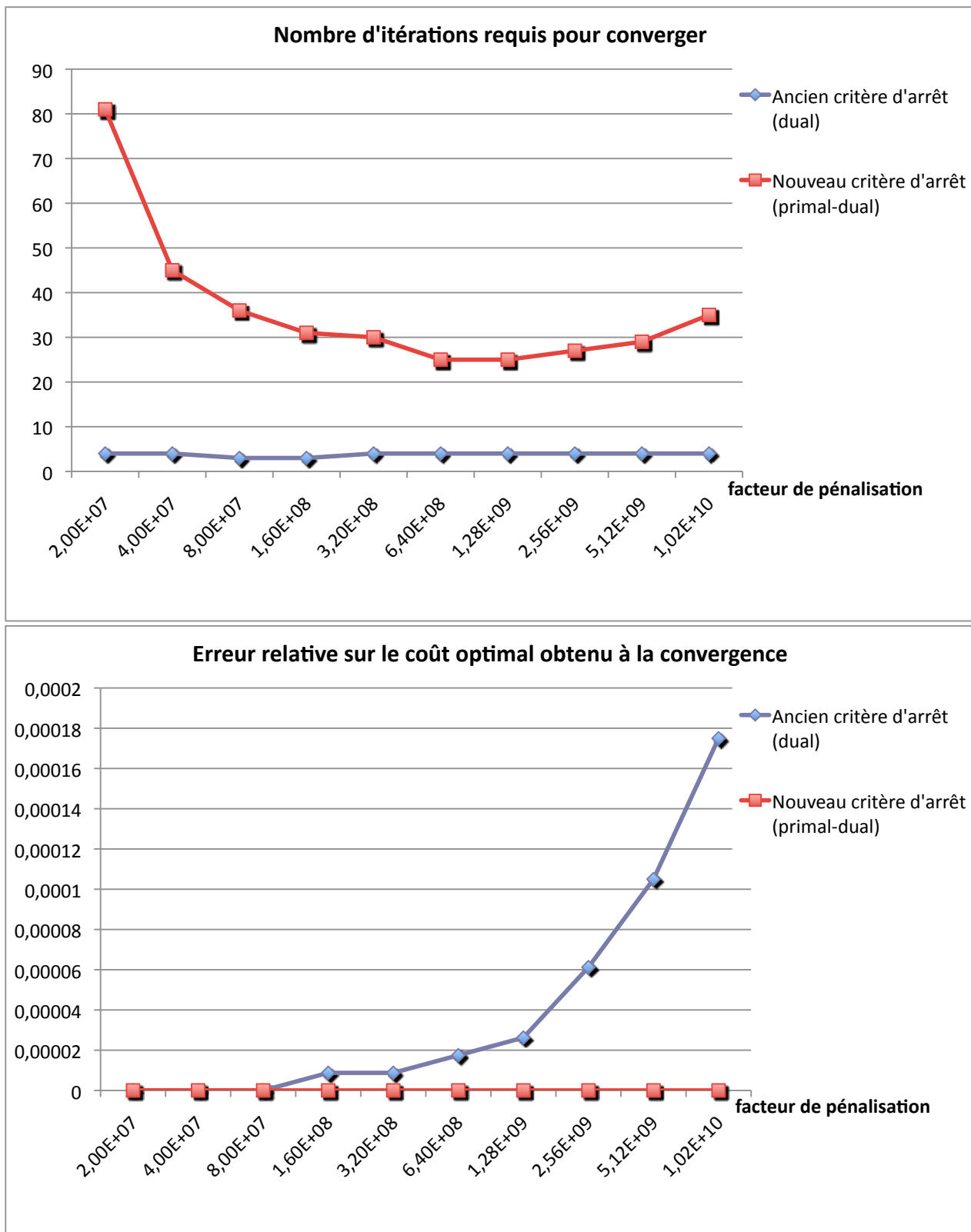
Nous avons alors ajouté un critère d'arrêt correspondant à la stabilité de la norme de la projection de l'itéré primal courant, comme cela été suggéré au cours des travaux de stage [Lenoir, 2005]. Nous avons obtenu les résultats présentés figure 8.13. Le durcissement du critère d'arrêt a permis, dans les cas où l'on obtenait une précision insuffisante, d'effectuer des itérations supplémentaires et d'améliorer nettement l'erreur obtenue sur le coût optimal. Cependant, le nombre d'itérations requis pour converger s'en trouve augmenté dans tous les cas.

8.5 Comparaison des coûts marginaux par rapport à ceux issus du modèle initial

Dans cette section, on s'intéresse à l'obtention des coûts marginaux en chaque nœud de l'arbre, à partir de la résolution via une décomposition scénario par scénario. On utilise ainsi le résultat de convergence du théorème 7.23, démontré au chapitre 7.

Le fait de pouvoir obtenir les coûts marginaux de l'électricité à l'issue de la résolution par l'algorithme du recouvrement progressif valide la possibilité pour EDF d'utiliser une telle approche pour résoudre le problème de gestion à moyen-terme de la production d'électricité par les unités thermiques.

FIGURE 8.13 – Comportement du recouvrement progressif avec mise à l'échelle, translation des variables et ajout d'un test d'arrêt, sur un arbre à 23 scénarios d'une période de 10 semaines, en fonction du paramètre de pénalisation choisi, avec une précision de 10^{-5} pour les critères d'arrêts primal et primal-dual



8.5.1 Démarche suivie

Nous avons comparé les coûts marginaux issus du recouvrement progressif à ceux obtenus par résolution frontale (méthode que l'on considère toujours comme étalon). Nous avons ainsi calculé les erreurs relatives sur les coûts marginaux obtenus en norme ℓ_∞ et en norme ℓ_2 . De manière à considérer des résultats d'un même ordre de grandeur, la norme ℓ_2 est divisée ici par la racine du nombre d'éléments du vecteur. Les limitations de la résolution frontale, présentées au paragraphe 8.2.3, nous ont cependant contraints à utiliser des arbres de taille réduite, c'est-à-dire dont le nombre de nœuds était compris entre 2 500 et 3 000.

Puis nous avons confronté ces erreurs relatives aux écarts (également relatifs) constatés entre les coûts marginaux calculés suite à une décomposition par unités de production (avec coordination par la méthode des faisceaux) et ceux obtenus par résolution frontale. Nous avons dans chaque cas effectué 100 itérations de la méthode des faisceaux⁸. En outre, les coûts marginaux utilisés en pratique par EDF sont ceux de la première semaine⁹. Nous avons alors également effectué ces mêmes comparaisons, mais en nous restreignant dans chaque cas aux pas de temps de la première semaine.

8.5.2 Unicité des coûts marginaux

Le théorème 7.23 assure la possibilité de calculer des variables duales associées à la relaxation de l'équilibre offre-demande. Cependant, nous n'avons pas de garantie quant à l'unicité de ces variables duales. En effet, la fonction duale du problème (définie en (8.3)) n'est a priori pas strictement convexe.

Cependant, l'on souhaite confronter les variables duales calculées à l'issue du recouvrement progressif à celles obtenues après une résolution frontale. Pour cela, il nous faut avant tout nous assurer que les objets mis en balance sont bien comparables. Nous avons alors cherché à nous assurer numériquement de l'unicité des variables duales associées à la relaxation de l'équilibre offre-demande. Nous avons ainsi résolu le problème linéaire (8.1) frontalement par le solveur CPLEX, en lui imposant deux approches distinctes : d'une part, une méthode de points intérieurs, dont on sait qu'elle fournit une solution au centre de la face optimale primale-duale, et d'autre part un algorithme de simplexe, qui produit quant à lui une solution sur un sommet de l'ensemble des solutions. Ces deux approches ont fourni des solutions duales identiques, et nous en avons ainsi déduit que l'ensemble des solutions duales était réduit à un singleton.

Si nous n'avons pas démontré théoriquement l'unicité des coûts marginaux dans un cadre général, nous en avons ainsi fait le constat empirique sur les expérimentations numériques présentées ci-dessous.

8.5.3 Résultats obtenus

8.5.3.1 Période d'étude de 10 semaines

Sur une période d'étude de 10 semaines, nous avons construit un arbre à 79 scénarios, soit 3 070 nœuds. Nous avons appliqué l'algorithme du recouvrement progressif à ce problème, avec un facteur de pénalisation égal à 10^6 , et l'algorithme a convergé en 16 itérations¹⁰. Les tableaux 8.1 et 8.2 recensent les erreurs obtenues sur les coûts marginaux. On constate que l'on obtient une précision nettement meilleure sur le coût optimal et sur les coûts marginaux lorsqu'on adopte une stratégie de décomposition par scénarios que si l'on décompose le problème par unités de production. Ces

8. Dans le cadre de l'utilisation opérationnelle de l'outil SOPRANO-REP, 50 itérations sont effectuées.

9. En effet, après la première semaine, la vision des niveaux de stocks n'est pas assez précise pour que le calcul des valeurs d'usage soit suffisamment fiable.

10. La précision requise pour les deux critères d'arrêt était de 10^{-5} .

TABLEAU 8.1 – Erreurs relatives sur le coût optimal et les coûts marginaux, obtenues pour le jeu de données de 10 semaines

	Coût optimal	Normes des coûts marginaux	
		norme ℓ_2	norme ℓ_∞
Décomposition par scénarios	$< 10^{-6}$	$1.19 \cdot 10^{-3}$	$4.18 \cdot 10^{-2}$
Décomposition par unités de production	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$6.84 \cdot 10^{-2}$	3.01

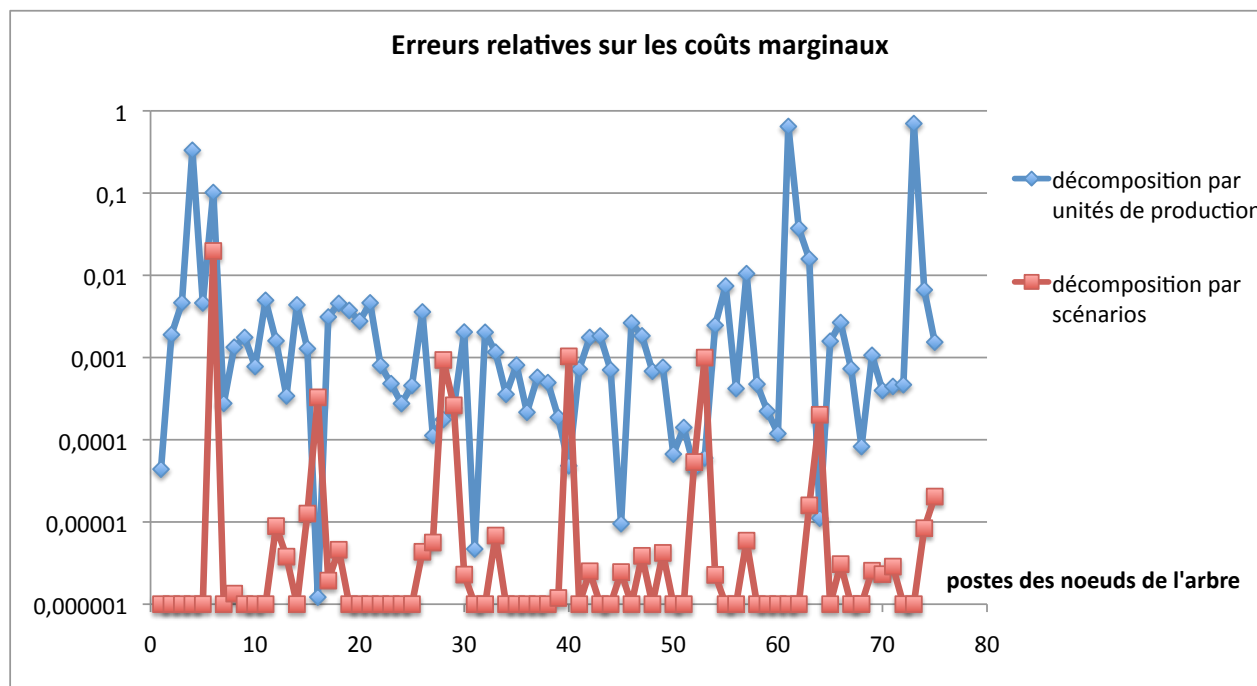
TABLEAU 8.2 – Erreurs relatives sur les coûts marginaux de la première semaine, obtenues pour le jeu de données de 10 semaines

	Normes des coûts marginaux	
	norme ℓ_2	norme ℓ_∞
Décomposition par scénarios	$2.29 \cdot 10^{-3}$	$1.98 \cdot 10^{-2}$
Décomposition par unités de production	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$7.00 \cdot 10^{-1}$

performances sont certainement dues au fait que la contrainte d'équilibre offre-demande n'est pas relaxée lorsqu'on décompose le problème par scénarios.

Nous avons également tracé sur la figure 8.14 les erreurs relatives sur les coûts marginaux, en chaque poste des nœuds de la première semaine de l'arbre. On constate sur cette figure que les

FIGURE 8.14 – Erreurs relatives sur les coûts marginaux pour le jeu de données de 10 semaines, en chaque poste des nœuds de l'arbre correspondant à la première semaine



imprécisions, pour ces deux méthodes, n'ont pas lieu aux mêmes postes. On explique également ce phénomène par le fait que les deux approches comparées ne relaxent pas les mêmes contraintes.

8.5. COMPARAISON DES COÛTS MARGINAUX PAR RAPPORT À CEUX ISSUS DU MODÈLE INITIAL

8.5.3.2 Période d'étude de 70 semaines

Sur le jeu de données dont la période d'étude s'étend sur 70 semaines, nous avons travaillé avec un arbre à 14 scénarios, soit 2 625 nœuds. Nous avons effectué 100 itérations de l'algorithme du recouvrement progressif sur ce problème, avec un facteur de pénalisation égal à 10^6 . Les erreurs obtenues sur les coûts marginaux apparaissent sur les tableaux 8.3 et 8.4. On constate de nouveau

TABLEAU 8.3 – Erreurs relatives sur le coût optimal et les coûts marginaux, obtenues pour le jeu de données de 70 semaines

	Coût optimal	Normes des coûts marginaux	
		norme ℓ_2	norme ℓ_∞
Décomposition par scénarios	$1.02 \cdot 10^{-6}$	$1.37 \cdot 10^{-3}$	$4.11 \cdot 10^{-2}$
Décomposition par unités de production	$5.28 \cdot 10^{-1}$	$6.37 \cdot 10^{-2}$	1.50

TABLEAU 8.4 – Erreurs relatives sur les coûts marginaux de la première semaine, obtenues pour le jeu de données de 70 semaines

	Normes des coûts marginaux	
	norme ℓ_2	norme ℓ_∞
Décomposition par scénarios	$1.21 \cdot 10^{-3}$	$1.96 \cdot 10^{-3}$
Décomposition par unités de production	$3.21 \cdot 10^{-2}$	$9.10 \cdot 10^{-2}$

que les coûts marginaux calculés à l'issue d'une décomposition par scénarios sont plus précis que ceux obtenus suite à une décomposition par unités de production.

La figure 8.15 représente les erreurs relatives sur les coûts marginaux, en chaque poste des nœuds de la première semaine de l'arbre. On y observe comme précédemment que les imprécisions sur le calcul des coûts marginaux n'ont pas lieu aux mêmes postes.

8.5.3.3 Période d'étude de 3 ans

Pour le jeu de données de 3 ans, nous avons étudié un arbre à 3 scénarios, soit 2 408 nœuds. Nous lui avons appliqué 100 itérations de l'algorithme du recouvrement progressif, avec un facteur de pénalisation égal à 10^6 . Les tableaux 8.5 et 8.6 fournissent les erreurs relatives obtenues sur les coûts marginaux, qui sont de nouveau meilleures avec une décomposition par scénarios.

TABLEAU 8.5 – Erreurs relatives sur le coût optimal et les coûts marginaux, obtenues pour le jeu de données de 3 ans

	Coût optimal	Normes des coûts marginaux	
		norme ℓ_2	norme ℓ_∞
Décomposition par scénarios	$< 10^{-6}$	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$4.50 \cdot 10^{-2}$
Décomposition par unités de production	$4.24 \cdot 10^{-2}$	$5.28 \cdot 10^{-2}$	1.40

La figure 8.16 illustre les erreurs relatives sur les coûts marginaux, en chaque poste des nœuds de la première semaine de l'arbre. Dans ce cas également, les postes auxquels on observe les plus grandes imprécisions des deux approches semblent ne pas se correspondre.

8.5.3.4 Commentaires

Les résultats numériques obtenus semblent confirmer, lorsqu'on applique une décomposition par scénarios, la bonne approximation des coûts marginaux qui sont des quantités essentielles à EDF

FIGURE 8.15 – Erreurs relatives sur les coûts marginaux pour le jeu de données de 70 semaines, en chaque poste des nœuds de l'arbre correspondant à la première semaine

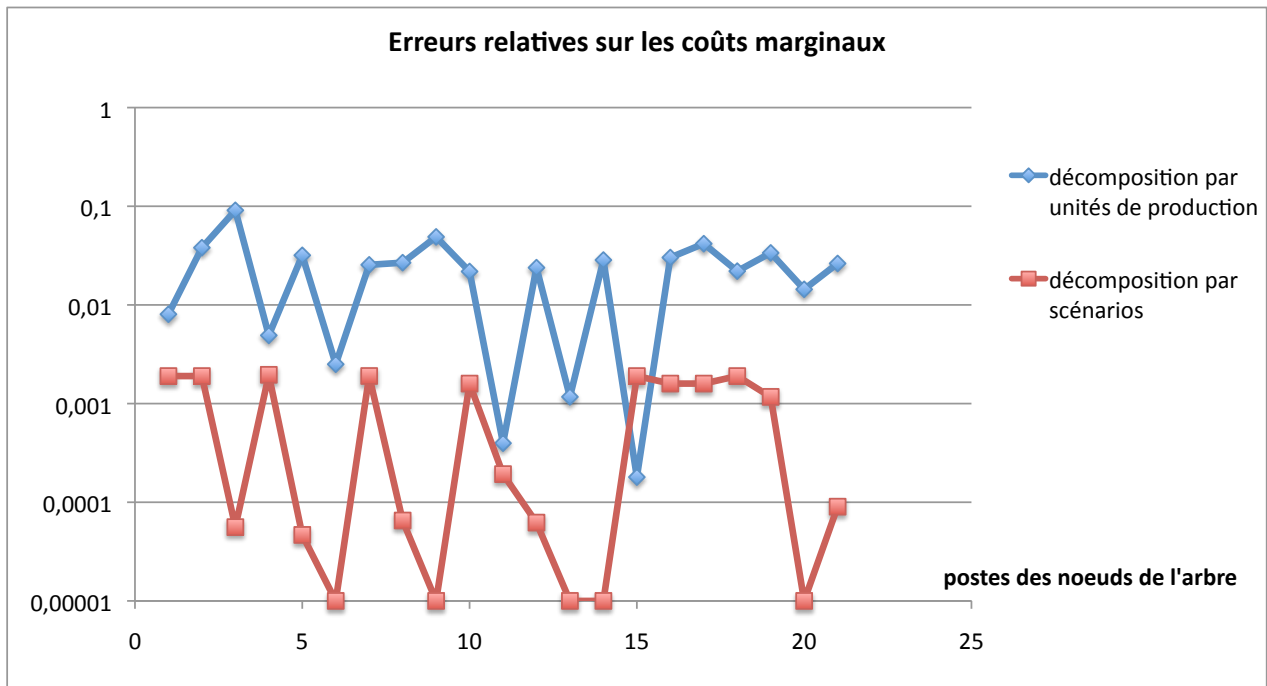
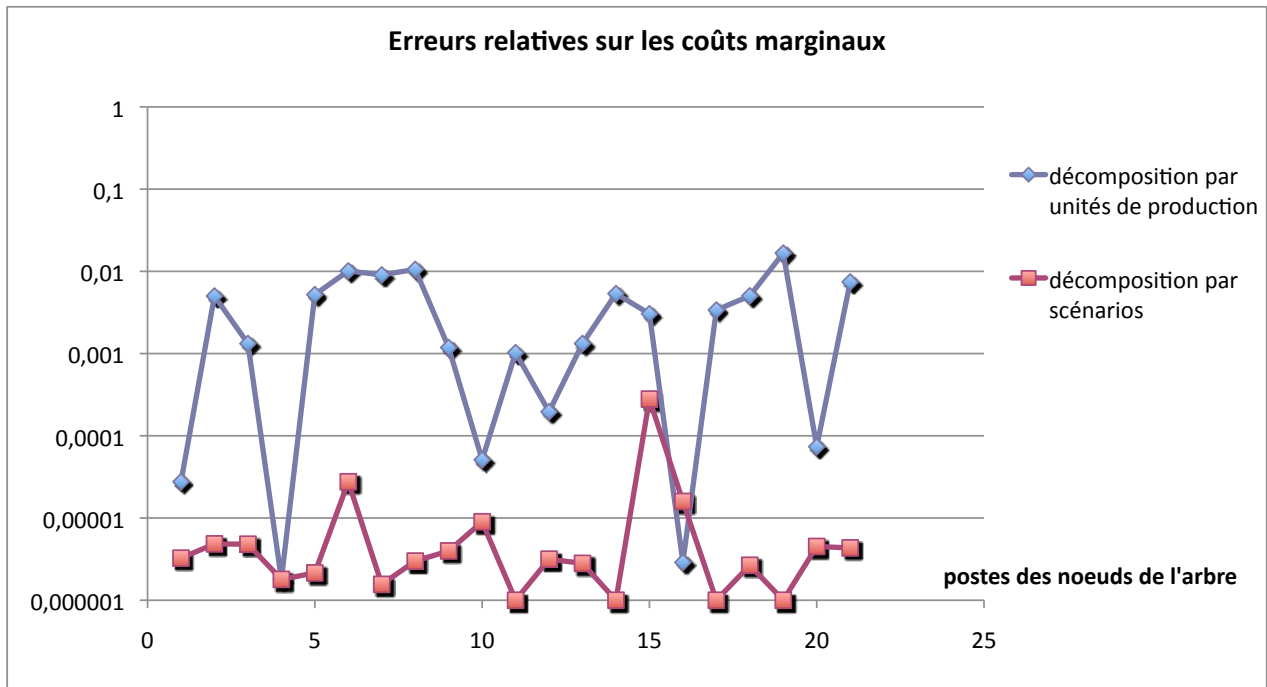


TABLEAU 8.6 – Erreurs relatives sur les coûts marginaux de la première semaine, obtenues pour le jeu de données de 3 ans

	Normes des coûts marginaux	
	norme ℓ_2	norme ℓ_∞
Décomposition par scénarios	$6.15 \cdot 10^{-5}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$
Décomposition par unités de production	$6.02 \cdot 10^{-3}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$

FIGURE 8.16 – Erreurs relatives sur les coûts marginaux pour le jeu de données de 3 ans, en chaque poste des nœuds de l'arbre correspondant à la première semaine



pour déterminer une stratégie de gestion de production d'électricité à moyen-terme. En effet, une décomposition par scénarios et non plus par unités de production permet de ne pas relaxer la contrainte d'équilibre offre-demande, et ainsi d'obtenir une meilleure précision sur les variables duales associées à cette contrainte, c'est-à-dire sur les coûts marginaux.

Cependant, il serait intéressant de comparer les résultats obtenus par les deux stratégies de décomposition envisagées sur des arbres de plus grande taille, c'est-à-dire de construire, pour des jeux de données de trois ans, des arbres comportant un nombre important de scénarios (de l'ordre d'une centaine). Néanmoins, pour effectuer de tels tests numériques, il faudrait envisager une parallélisation du code SOPRANO-scénarios développé au cours de cette thèse.

8.6 Perspectives

8.6.1 Parallélisation

Dans le cadre d'une parallélisation du code implémenté au cours de cette thèse, il pourrait être intéressant d'utiliser l'une des heuristiques décrites au paragraphe 6.7.4, de manière à optimiser la gestion des différents processeurs.

8.6.2 Prise en compte des variables entières

Comme on l'a souligné à la section 6.8.4, il existe des approches heuristiques permettant d'appliquer l'algorithme du recouvrement progressif à des problèmes plus complexes, par exemple comportant des variables entières. Une perspective des travaux décrits dans ce chapitre est alors d'essayer de résoudre le problème associé par une ou plusieurs des heuristiques citées à la section 6.8.4.

8.6.3 Une stratégie de coordination alternative

On peut également envisager, tout en conservant une approche de décomposition par scénarios, de changer de stratégie de coordination. Par exemple, il pourrait être intéressant de comparer les coûts marginaux issus du recouvrement progressif à ceux obtenus après une décomposition par scénarios associée à une coordination par la méthode des faisceaux.

Cinquième partie

Épilogue

Chapitre 9

Conclusions et perspectives

9.1 L'algorithme du lagrangien augmenté

Dans la deuxième partie de cette thèse - en particulier au chapitre 5 - nous avons étudié le comportement de l'algorithme du lagrangien augmenté dans un cadre non réalisable. Au théorème 5.22, nous avons ainsi étendu à des contraintes potentiellement incompatibles le résultat de convergence linéaire globale de l'algorithme appliqué à un problème quadratique convexe - non nécessairement strictement - sous contraintes linéaires d'égalité et d'inégalité. Les perspectives à l'issue de ces travaux sont diverses.

D'un point de vue pratique, si un utilisateur n'est pas en mesure de s'assurer simplement de la faisabilité du problème qu'il souhaite résoudre, l'application de la nouvelle version de l'algorithme 5.2 lui garantira d'être averti si les contraintes qu'il souhaite traiter sont incompatibles et, le cas échéant, d'obtenir à la convergence la solution du problème réalisable le plus proche. Cette fonctionnalité a vocation à être intégrée au code QPAL, décrit dans [Gilbert, 2009a].

D'un point de vue théorique, il serait d'une part profitable d'étendre ce résultat de convergence linéaire à des problèmes quadratiques dont l'ensemble admissible serait un convexe, non nécessairement polyédrique. Ainsi, des contraintes telles que des régions de confiance (dépeintes entre autres dans [Conn et col., 2000]) pourraient être prises en compte.

Une autre incidence de ces travaux pourrait d'autre part être liée à l'utilisation de l'algorithme SQP (présenté notamment dans [Bonnans et col., 2006, partie III]) pour la résolution de problèmes non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \inf_x f(x), \\ l \leq c(x) \leq u. \end{cases} \quad (9.1)$$

En effet, le principe de cette méthode est de résoudre itérativement des problèmes quadratiques s'écrivant

$$\begin{cases} \inf_d \frac{1}{2} d^T H d + g^T d, \\ l' \leq A d \leq u', \end{cases} \quad (9.2)$$

où g est le gradient $\nabla f(x)$ de f en l'itéré courant x , H est une approximation semi-définie positive du hessien du lagrangien du problème original (9.1), $l' := l - c(x)$, $u' := u - c(x)$ et $A := c'(x)$ est la jacobienne des contraintes. Une perspective intéressante pourrait alors consister à montrer que, dans le cas où les problèmes (9.2) sont convexes (réalisables ou non), l'algorithme du lagrangien augmenté génère une direction de descente d'une « fonction de mérite » du problème (9.1) (c'est-à-dire une fonction Φ telle que chaque minimum local de (9.1) soit minimum, sans contraintes, de Φ). L'algorithme du lagrangien augmenté pourrait ainsi être utilisé, dans le cadre du solveur SQPlab (documenté dans [Gilbert, 2009b]), pour résoudre les problèmes quadratiques (9.2).

Du point de vue de l'optimisation industrielle à laquelle nous nous sommes intéressés au cours de cette thèse, une perspective de ces travaux pourrait être le changement de la prise en compte

de la défaillance en électricité dans les outils d'aide à la décision développés et utilisés par EDF. En effet, dans une grande partie de ces outils, la défaillance est actuellement modélisée par une unité de production fictive, de coût très élevé (de l'ordre de 10 000 €/MWh) et de profondeur « infinie ». Cependant, la valorisation économique de la défaillance par un coût proportionnel est une approximation bancale de la réalité, de laquelle il serait possible de se dispenser. Pour cela, il suffirait de résoudre le problème considéré par une méthode garantissant une convergence vers la solution du problème réalisable le plus proche, comme c'est le cas du lagrangien augmenté. En outre, les approches actuelles de résolution reposent sur des techniques de décomposition qui sont adaptées à la grande taille des problèmes à résoudre. Or, comme on l'a vu à la section 4.6, il existe diverses méthodes de linéarisation du lagrangien augmenté. Une perspective pour ces travaux - pour l'heure théoriques - pourrait ainsi consister à étudier le comportement de ces méthodes dans le cas non réalisable et, éventuellement, à choisir d'appliquer l'une d'entre elles à un problème de gestion de production d'électricité, dans lequel la défaillance ne serait pas modélisée comme un groupe fictif. Par exemple, pour l'un des modèles de gestion de production d'électricité à court-terme d'EDF, l'algorithme utilisé est celui du lagrangien augmenté linéarisé (exposé au paragraphe 4.6.1). Des tests empiriques pourraient être effectués de manière à vérifier numériquement si les résultats théoriques de convergence de la contrainte vers son minimum s'appliquent à cette version linéarisée de l'algorithme du lagrangien augmenté.

Une application industrielle de ces travaux amène ainsi naturellement à s'interroger sur le comportement de l'algorithme du lagrangien augmenté lorsque les problèmes internes ne sont résolus qu'approximativement à chaque itération, ce qui est le cas en pratique. Une perspective serait alors d'étendre le résultat de convergence à un tel cadre, en s'inspirant des références évoquées au paragraphe 4.7.4.1, ou encore des travaux de [Solodov et Svaiter, 1999a, Solodov et Svaiter, 1999b, Solodov et Svaiter, 2000] ou plus récemment de [Eckstein et Silva, 2010b].

Enfin, plus généralement, il serait attrayant de chercher à transposer le résultat obtenu pour l'algorithme du lagrangien augmenté à la relaxation lagrangienne. En effet, d'après le résultat de [Dean et Glowinski, 2006, théorème 4.1], dans le cadre d'une relaxation lagrangienne (détaillée dans [Hiriart-Urruty et Lemaréchal, 1993, chapitres XIV et XV]) appliquée à un problème strictement quadratique convexe sous contraintes d'égalité non réalisables, si les pas duaux sont choisis suffisamment petits, les itérés primaux convergent vers l'unique solution du problème réalisable le plus proche. Une perspective serait alors, dans le cadre de la relaxation lagrangienne, d'étendre ce résultat aux problèmes convexes - éventuellement linéaires - soumis à des contraintes d'égalité et d'inégalité potentiellement incompatibles.

9.2 L'algorithme du recouvrement progressif

Nous exposons à présent les contributions de cette thèse liées à l'algorithme du recouvrement progressif, ainsi que les perspectives consécutives à ces travaux.

Dans un premier temps, nous avons construit, à la section 7.1, un contre exemple montrant que l'on ne pouvait pas assurer la convergence de l'algorithme avec un paramètre arbitrairement variable. Cependant, étant donné les difficultés évoquées quant au réglage de ce paramètre, la détermination d'une heuristique permettant un réglage itératif et adaptatif du paramètre de pénalisation serait d'une utilité précieuse. Ainsi, la recherche d'une règle adaptative du paramètre assurant la convergence demeure un problème aux enjeux éminents. Il pourrait alors s'avérer pertinent de conduire une étude plus approfondie du cas quadratique convexe, de manière à obtenir une estimation de la vitesse de convergence de l'algorithme en fonction du paramètre de pénalisation r_k . Cela permettrait de construire des heuristiques pour adapter le paramètre en fonction du comportement de l'algorithme aux itérations précédentes, comme cela a été établi par [Delbos et Gilbert, 2005] pour l'algorithme du lagrangien augmenté.

Nous avons également démontré, à la section 7.2, la convergence des multiplicateurs associés aux contraintes non dualisées au cours de l'algorithme du recouvrement progressif. La preuve que nous avons exposée suppose toutefois une condition de qualification des contraintes assez forte, puisqu'il s'agit de l'indépendance linéaire des gradients des contraintes d'égalité et d'inégalité actives. Une perspective pourrait alors consister à affaiblir l'hypothèse de qualification des contraintes, en supposant par exemple seulement la condition de qualification de Mangasarian-Fromovitz (présentée dans [Mangasarian et Fromovitz, 1967]) selon laquelle, si il existe une combinaison linéaire nulle de ces gradients, avec des coefficients associés aux indices de contraintes d'inégalité actives positifs, alors, tous les coefficients de cette combinaison linéaire s'annulent.

Enfin, dans le cadre de l'application du recouvrement progressif à un problème industriel de gestion de production, détaillée au chapitre 8, nous avons constaté qu'une décomposition par scénarios était susceptible d'offrir une meilleure précision sur les coûts marginaux calculés par l'algorithme. Deux perspectives pour ces travaux se présentent alors. Il s'agit d'une part d'utiliser l'algorithme sur un problème industriel plus étoffé, comportant des variables entières; il existe en effet, comme on l'a vu à la section 6.8.4, des heuristiques adaptées à l'application du recouvrement progressif à des problèmes mixtes. D'autre part, puisque nous avons mis en évidence l'intérêt d'une décomposition par scénarios, il pourrait être opportun de se préoccuper à présent du meilleur choix possible pour la stratégie de coordination. Il existe en effet des approches alternatives au recouvrement progressif qui sont spécifiquement dédiées à la décomposition par scénarios, telles que l'algorithme d'approximation quadratique diagonale évoqué à la section 3.3.2. Il est également possible d'en adapter d'autres, qui ne sont pas attachées à une forme de décomposition particulière. Par exemple il serait intéressant de comparer, sur un problème réel de gestion de production d'électricité, les résultats issus du recouvrement progressif à ceux calculés par une relaxation lagrangienne décomposée par scénarios suivie d'une coordination par la méthode des faisceaux, ou encore par une linéarisation du lagrangien augmenté - par l'une des méthodes présentées à la section 4.6 - décomposé par scénarios.

Bibliographie

- [Abramson et de Silva, 1993] ABRAMSON, D. et de SILVA, A. (1993). Computational experience with the parallel progressive hedging algorithm for stochastic linear programs. *In 1993 Parallel Computing and Transputers Conference*, pages 164–174, Brisbane. [88](#)
- [Andreani et col., 2007] ANDREANI, R., BIRGIN, E. G., MARTÍNEZ, J. M. et SCHUVERDT, M. L. (2007). On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 18:1286–1302. [32](#)
- [Arrow et col., 1973] ARROW, K. J., GOULD, F. J. et HOWE, S. M. (1973). A generalized saddle point result for constrained optimization. *Mathematical Programming*, 5:225–234. [34](#), [51](#)
- [Bacaud et col., 2001] BACAUD, L., LEMARÉCHAL, C., RENAUD, A. et SAGASTIZÁBAL, C. (2001). Bundle methods in stochastic optimal power management: a disaggregated approach using preconditioners. *Computational Optimization and Applications*, 20(3):227–244. [23](#), [124](#)
- [Barro et Canestrelli, 2004] BARRO, D. et CANESTRELLI, E. (2004). Dynamic portfolio optimization: Time decomposition using the maximum principle with a scenario approach. *European Journal of Operational Research*, 163:217–229. [88](#)
- [Barruncho et col., 1999] BARRUNCHO, L. M. F., CARVALHO, P. M. S. et FERREIRA, L. A. F. M. (1999). Hedging large-scale distribution system investments against uncertainty. *In CONFERENCES, I.*, éditeur : *Power Engineering Society 1999 Winter Meeting*, volume 2, pages 901–906. [79](#), [87](#)
- [Barty et col., 2012] BARTY, K., CHICHE, A., GILBERT, J. C. et PORCHERON, M. (2012). On the non-dualized constraint multipliers in the progressive hedging algorithm for solving a stochastic optimization problem on a scenario tree. En préparation. [95](#), [119](#)
- [Barty et col., 2009] BARTY, K., CHICHE, A. et ROY, J.-S. (2009). Comparaison d’algorithmes de décomposition. Rapport technique H-R35-2009-00007-FR, EDF R&D. Rapport de stage de fin d’études. [127](#)
- [Bauschke et Combettes, 2011] BAUSCHKE, H. H. et COMBETTES, P. L. (2011). *Convex analysis and monotone operator theory in hilbert spaces*. Springer. [33](#)
- [Ben-Tal et col., 2009] BEN-TAL, A., GHAOUI, L. E. et NEMIROVSKI, A. (2009). *Robust optimization*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press. [26](#)
- [Benchakroun et col., 2000] BENCHAKROUN, A., DUSSAULT, J.-P., HAMDI, A. et MAHEY, P. (2000). Adaptive scaling and convergence rates of a separable augmented Lagrangian algorithm. *In Optimization*, volume 481, pages 278–287. [92](#)
- [Berland et Haugen, 1996] BERLAND, N. J. et HAUGEN, K. K. (1996). Mixing stochastic dynamic programming and scenario aggregation. *Annals of Operations Research*, 64:1–19. [88](#), [89](#), [92](#)
- [Bertsekas et Tsitsiklis, 1997] BERTSEKAS, D. P. et TSITSIKLIS, J. N. (1997). *Parallel and distributed computation: Numerical methods*. Athena Scientific. [80](#)
- [Birgin et col., 2005] BIRGIN, E. G., CASTILLO, R. A. et MARTÍNEZ, J. M. (2005). Numerical comparison of augmented Lagrangian algorithms for nonconvex problems. *Computational Optimization and Applications*, 31(1):31–55. [32](#)

- [Bonnans *et col.*, 2006] BONNANS, J. F., GILBERT, J. C., LEMARÉCHAL, C. et SAGASTIZÁBAL, C. (2006). *Numerical optimization – Theoretical and practical aspects* (seconde édition). Universitext. Springer Verlag, Berlin. 30, 32, 52, 149
- [Borwein et Lewis, 2000] BORWEIN, J. M. et LEWIS, A. (2000). *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*. Springer, New York. 50
- [Bruck et Reich, 1977] BRUCK, R. E. et REICH, S. (1977). Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces. *Houston Journal of Mathematics*, 3:459–470. 49, 69
- [Burke, 1989] BURKE, J. V. (1989). A sequential quadratic programming method for potentially infeasible mathematical programs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 139:319–351. 68
- [Burke, 1992] BURKE, J. V. (1992). A robust trust region method for constrained nonlinear programming problems. *SIAM Journal on Optimization*, 2:325–347. 68
- [Burke et Han, 1989] BURKE, J. V. et HAN, S.-P. (1989). A robust sequential quadratic programming method. *Mathematical Programming*, 43:277–303. 68
- [Buys, 1972] BUYS, J. D. (1972). *Dual algorithms for constrained optimization problems*. Thèse de doctorat, Rijksuniversiteit te Leiden, Leiden, The Netherlands. 31, 40, 51
- [Byrd, 1987] BYRD, R. (1987). Robust trust region methods for constrained optimization. Third SIAM Conference on Optimization, Houston, TX. 68
- [Byrd *et col.*, 1987] BYRD, R. H., SCHNABEL, R. et SHULTZ, G. A. (1987). A trust region algorithm for nonlinearly constrained optimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24:1152–1170. 68
- [Carvalho *et col.*, 2005] CARVALHO, P. M. S., FERREIRA, L. A. F. M. et REIS, F. S. (2005). Reinforcement scheduling convergence in power systems transmission planning. *IEEE Transactions on power systems*, 20(2):1151–1157. 87, 90
- [Casey et Sen, 2005] CASEY, M. S. et SEN, S. (2005). The scenario generation algorithm for multistage stochastic linear programming. *Mathematics of Operations Research*, 30(3):615–631. 21
- [Chiche, 2009] CHICHE, A. (2009). Comparaison d’algorithmes de décomposition. Nancy, France. ROADEF (Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision). Présentation orale. 127
- [Chiche et Gilbert, 2010a] CHICHE, A. et GILBERT, J. C. (2010a). Comportement et usage de l’algorithme de lagrangien augmenté dans le cas d’un problème quadratique convexe non réalisable. Paris, France. Groupe de travail de l’équipe COMMANDS. Présentation orale. 47
- [Chiche et Gilbert, 2010b] CHICHE, A. et GILBERT, J. C. (2010b). How the augmented Lagrangian algorithm deals with an infeasible convex quadratic optimization problem. Santiago, Chili. ICCOPT (The International Conference on Continuous Optimization). Présentation orale. 47
- [Chiche et Gilbert, 2012] CHICHE, A. et GILBERT, J. C. (2012). How the augmented Lagrangian algorithm can deal with an infeasible convex quadratic optimization problem. En préparation. 47
- [Chiche *et col.*, 2011] CHICHE, A., GILBERT, J. C. et PORCHERON, M. (2011). Study of the progressive hedging algorithm applied to the medium-term electricity planning problem. Paris, France. COPI (Conference on Optimization and Practices in Industry). Présentation orale. 119
- [Chiralaksanakul et Morton, 2004] CHIRALAKSANAKUL, A. et MORTON, D. P. (2004). Assessing policy quality in multi-stage stochastic programming. *Stochastic Programming e-print series*, 12. 21
- [Chun et Robinson, 1995] CHUN, B. J. et ROBINSON, S. M. (1995). Scenario analysis via bundle decomposition. *Annals of Operations Research*, 56:39–63. 87, 88, 89
- [Cohen, 1978] COHEN, G. (1978). Optimization by decomposition and coordination: a unified approach. *IEEE Transactions on automatic control*, 23(2):222–232. 37

- [Cohen, 1980] COHEN, G. (1980). Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 32:277–305. [37](#), [127](#)
- [Conn et col., 1991] CONN, A. R., GOULD, N. I. M. et TOINT, P. L. (1991). A globally convergent augmented Lagrangian algorithm for optimization with general constraints and simple bounds. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28(2):545–572. [40](#)
- [Conn et col., 1992] CONN, A. R., GOULD, N. I. M. et TOINT, P. L. (1992). *LANCELOT, A Fortran package for large-scale nonlinear optimization*, volume 17 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag. [32](#)
- [Conn et col., 2000] CONN, A. R., GOULD, N. I. M. et TOINT, P. L. (2000). *Trust-Region Methods*. MPS-SIAM Series on Optimization 1. SIAM and MPS, Philadelphia. [68](#), [149](#)
- [Crainic et col., 2011] CRAINIC, T. G., FU, X., GENDREAU, M., REI, W. et WALLACE, S. W. (2011). Progressive hedging-based meta-heuristics for stochastic network design. *Networks, an international journal*, 58(2):114–124. [93](#)
- [Culioli et Malézieux, 2000] CULIOLI, J.-C. et MALÉZIEUX, J.-B. (2000). Numerical considerations on decomposition and augmented Lagrangians. In *Optimization*, volume 481, pages 288–304. [39](#)
- [Dean et Glowinski, 2006] DEAN, E. J. et GLOWINSKI, R. (2006). An augmented Lagrangian approach to the numerical solution of the Dirichlet problem for the elliptic Monge-Ampère equation in two dimensions. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 22:71–96. [4](#), [29](#), [41](#), [47](#), [51](#), [69](#), [150](#)
- [Delbos et Gilbert, 2005] DELBOS, F. et GILBERT, J. C. (2005). Global linear convergence of an augmented Lagrangian algorithm to solve convex quadratic optimization problems. *Journal of Convex Analysis*, 12(1):45–69. [4](#), [32](#), [35](#), [36](#), [48](#), [50](#), [51](#), [54](#), [58](#), [68](#), [150](#)
- [Dembo, 1991] DEMBO, T. S. (1991). Scenario optimization. *Annals of Operations Research*, 30(1):63–80. [24](#)
- [Dempster, 2006] DEMPSTER, M. A. H. (2006). Sequential importance sampling algorithms for dynamic stochastic programming. *Journal of Mathematical Sciences*, 133(4):1422–1444. [21](#)
- [Dentcheva et Römisich, 2004] DENTCHEVA, D. et RÖMISCH, W. (2004). Duality gaps in nonconvex stochastic optimization. *Mathematical Programming*, 101(3):515–535. [93](#)
- [dos Santos et col., 2009] dos SANTOS, M. L. L., da SILVA, E. L., FINARDI, E. C. et GONÇALVES, R. E. C. (2009). Practical aspects in solving the medium-term operation planning problem of hydrothermal power systems by using the progressive hedging method. *Electrical Power and Energy Systems*, 31(9):546–552. [87](#), [88](#), [89](#)
- [Dostál et col., 1999] DOSTÁL, Z., FRIEDLANDER, A. et SANTOS, S. A. (1999). Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with equality constraints. *Computational Optimization and Applications*, 14(1):37–53. [40](#), [51](#)
- [Dostál et col., 2003] DOSTÁL, Z., FRIEDLANDER, A. et SANTOS, S. A. (2003). Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with simple bounds and equality constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 13(4):1120–1140. [40](#), [51](#)
- [Dostál et col., 2000] DOSTÁL, Z., FRIEDLANDER, A., SANTOS, S. A. et ALESAWI, K. (2000). Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with equality constraints: corrigendum and addendum. *Computational Optimization and Applications*, 23:127–133. [51](#)
- [Douglas et Rachford, 1956] DOUGLAS, J. et RACHFORD, H. H. (1956). On the numerical solution of the heat conduction problem in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:421–439. [85](#)

- [Dupačová, 1995] DUPAČOVÁ, J. (1995). Postoptimality for multistage stochastic linear programs. *Annals of Operations Research*, 56(1):65–78. 21
- [Dupačová et col., 2000] DUPAČOVÁ, J., CONSIGLI, G. et WALLACE, S. W. (2000). Scenarios for multistage stochastic programs. *Annals of Operations Research*, 100:25–53. 16, 17, 18, 21
- [Dupačová et col., 2003] DUPAČOVÁ, J., GRÖWE-KUSKA, N. et RÖMISCH, W. (2003). Scenario reduction in stochastic programming: An approach using probability metrics. *Mathematical Programming*, 95(3):493–511. 19, 20, 21, 24
- [Dussault, 1998] DUSSAULT, J.-P. (1998). Augmented penalty algorithms. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 18(3):355–372. 39
- [Dussault et col., 2005] DUSSAULT, J.-P., GUÈYE, O. M. et MAHEY, P. (2005). Separable augmented Lagrangian algorithm with multidimensional scaling for monotropic programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 127:329–345. 38, 80
- [Dussault et col., 1996] DUSSAULT, J.-P., HAMDI, A. et MAHEY, P. (1996). A new decomposition method in nonconvex programming via a separable augmented Lagrangian. In *English French-German Conference on optimization*, pages 90–104. 38
- [Dyer et Stougie, 2006] DYER, M. et STOUGIE, L. (2006). Computational complexity of stochastic programming problems. *Mathematical Programming*, 106(3):423–432. 26
- [Eckstein et Silva, 2010a] ECKSTEIN, J. et SILVA, P. J. S. (2010a). A practical relative error criterion for augmented Lagrangians. À paraître. 40, 68
- [Eckstein et Silva, 2010b] ECKSTEIN, J. et SILVA, P. J. S. (2010b). Proximal methods for nonlinear programming: Double regularization and inexact subproblems. *Computational Optimization and Applications*, 46(2):279–304. 32, 68, 150
- [Epelman et Freund, 2000] EPELMAN, M. et FREUND, R. (2000). Condition number complexity of an elementary algorithm for computing a reliable solution of a conic linear system. *Mathematical Programming*, 88(3):451–485. 41
- [Fan et Liu, 2008] FAN, Y. et LIU, C. (2008). Solving stochastic transportation network protection problems using the progressive hedging-based method. *Networks and Spatial Economics*, 10:193–208. 87, 89
- [Faure-Miller, 2008] FAURE-MILLER, X. (2008). Optimisation frontale du problème de gestion moyen-terme du portefeuille de production d’EDF. Rapport technique H-R35-2008-04187-FR, EDF R&D. Rapport de stage. 127, 130
- [Fedry et Strugarek, 2005] FEDRY, H. et STRUGAREK, C. (2005). Un autre regard sur la construction d’arbres d’aléas pour SOPRANO. Rapport technique HR-31/04/007/A, EDF R&D. Rapport de stage. 24
- [Formation GesProd, 2011] Formation GesProd (2011). *Gestion optimisée de la production*. EDF R&D, 1, avenue du Général de Gaulle - 92141 CLAMART Cedex. Formation interne. 7
- [Fortin et Glowinski, 1982] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1982). *Méthodes de lagrangien augmenté – Applications à la résolution numérique de problèmes aux limites*, volume 9 de *Méthodes Mathématiques de l’Informatique*. Gauthier-Villars, Paris. 41, 45, 47, 50, 65
- [Frank et Wolfe, 1956] FRANK, M. et WOLFE, P. (1956). An algorithm for quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3:95–110. 52
- [Friedlander et Leyffer, 2008] FRIEDLANDER, M. et LEYFFER, S. (2008). Global and finite termination of a two-phase augmented Lagrangian filter method for general quadratic programs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(4):1706–1726. 32, 51

- [Friedlander et Martínez, 1994] FRIEDLANDER, M. et MARTÍNEZ, J. M. (1994). On the maximization of a concave quadratic function with box constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 4(1):177–192. [32](#)
- [Fulga, 2009] FULGA, C. (2009). Dynamic portfolio optimization for utility-based models. In *2009 International Conference on Information and Financial Engineering*. [87](#)
- [Gilbert, 2009a] GILBERT, J. C. (2009a). QPAL – A solver of convex quadratic optimization problems, using an augmented Lagrangian approach – Version 0.6.1. Rapport Technique 0377, INRIA, BP 105, 78153 Le Chesnay, France. [32](#), [49](#), [149](#)
- [Gilbert, 2009b] GILBERT, J. C. (2009b). SQPlab – A Matlab software for solving nonlinear optimization problems and optimal control problems – Version 0.4.4. Rapport technique, INRIA, BP 105, 78153 Le Chesnay, France. [149](#)
- [Gilbert, 2012] GILBERT, J. C. (2012). *Éléments d’Optimisation Différentiable – Théorie et Algorithmes*. Syllabus de cours à l’ENSTA, Paris. [31](#)
- [Gilbert et Chiche, 2010] GILBERT, J. C. et CHICHE, A. (2010). How the augmented Lagrangian algorithm deals with an infeasible convex quadratic optimization problem. Erice, Italie. Nonlinear optimization, variational inequalities, and equilibrium problems. Présentation orale. [47](#)
- [Girardeau, 2010] GIRARDEAU, P. (2010). *Résolution de grands problèmes en optimisation stochastique dynamique et synthèse de lois de commande*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, France. [25](#)
- [Glowinski et Le Tallec, 1989] GLOWINSKI, R. et LE TALLEC, P. (1989). *Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*, volume 9 de *SIAM Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA. [41](#), [47](#), [50](#), [65](#)
- [Grellier et col., 2004] GRELLIER, V., MARTINETTO, P., MAEGHT, J. et TEYTAUD, O. (2004). Choisir les bons arbres. Rapport technique HR-31/04/004/A, EDF R&D. RAPPORT CONFIDENTIEL. [23](#)
- [Gröwe-Kuska et col., 2004] GRÖWE-KUSKA, N., HEITSCH, H. et RÖMISCH, W. (2004). Scenario reduction and scenario tree construction for power management problems. In *IEEE Bologna Power Tech Proceedings*. [19](#), [20](#)
- [Haarhoff et Buys, 1970] HAARHOFF, P. C. et BUYS, J. D. (1970). A new method for the optimization of a nonlinear function subject to nonlinear constraints. *The Computer Journal*, 13(2):178–184. [31](#)
- [Hager, 1987] HAGER, W. W. (1987). Dual techniques for constrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 55(1):37–71. [41](#)
- [Hager, 1993] HAGER, W. W. (1993). Analysis and implementation of a dual algorithm for constrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 79(3):427–462. [41](#)
- [Haugen et col., 2001] HAUGEN, K. K., LØKKETANGEN, A. et WOODRUFF, D. L. (2001). Progressive hedging as a meta-heuristic applied to stochastic lot-sizing. *European Journal of Operational Research*, 132(1):116–122. [93](#)
- [Heitsch et Römisich, 2003] HEITSCH, H. et RÖMISCH, W. (2003). Scenario reduction algorithms in stochastic programming. *Computational Optimization and Applications*, 24(2-3):187–206. [19](#), [20](#)
- [Heitsch et Römisich, 2005] HEITSCH, H. et RÖMISCH, W. (2005). Generation of multivariate scenario trees to model stochasticity in power management. In *IEEE St. Petersburg Power Tech*. [19](#), [20](#)
- [Heitsch et Römisich, 2009] HEITSCH, H. et RÖMISCH, W. (2009). Scenario tree modeling for multistage stochastic programs. *Mathematical Programming*, 118(2):371–406. [21](#)

- [Helgason et Wallace, 1991] HELGASON, T. et WALLACE, S. W. (1991). Approximate scenario solutions in the progressive hedging algorithm: A numerical study with an application to fisheries management. *Annals of Operations Research*, 31(1-4):425–444. [87](#), [88](#)
- [Henrion et Malick, 2009] HENRION, D. et MALICK, J. (2009). Projection methods for conic feasibility problems: applications to polynomial sum-of-squares decompositions. *Optimization Methods & Software*. [51](#)
- [Hestenes, 1969] HESTENES, M. R. (1969). Multiplier and gradient methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4:303–320. [29](#), [39](#), [51](#)
- [Higle et col., 2009] HIGLE, J. L., RAYCO, B. et SEN, S. (2009). Stochastic scenario decomposition for multistage stochastic programs. *IMA Journal of Management Mathematics*, 21(1):39–66. [25](#)
- [Hiriart-Urruty et Lemaréchal, 1993] HIRIART-URRUTY, J.-B. et LEMARÉCHAL, C. (1993). *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, volume 305-306 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag. [30](#), [50](#), [53](#), [68](#), [150](#)
- [Høyland et Wallace, 2001] HØYLAND, K. et WALLACE, S. W. (2001). Generating scenario trees for multistage decision problems. *Management Science*, 47(2):295–307. [17](#), [21](#), [23](#)
- [Hvattum et col., 2009] HVATTUM, L. M., LØKKETANGEN, A. et GILBERT, L. (2009). Scenario tree-based heuristics for stochastic inventory-routing problems. *INFORMS Journal on Computing*, 21(2):268–285. [93](#)
- [Kaut et Wallace, 2007] KAUT, M. et WALLACE, S. W. (2007). Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming. *Pacific Journal of Optimization*, 2(3):257–271. [17](#), [21](#), [22](#), [23](#)
- [Kouwenberg, 2001] KOUWENBERG, R. (2001). Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. *European Journal of Operational Research*, 134(2):279–292. [18](#)
- [Lemaréchal, 1978] LEMARÉCHAL, C. (1978). Bundle methods in nonsmooth optimization. In *Nonsmooth optimization (Proc. IIASA Workshop, Laxenburg, 1977)*, volume 3, pages 70–102, Oxford. Pergamon. [127](#)
- [Lemaréchal et Sagastizábal, 1995] LEMARÉCHAL, C. et SAGASTIZÁBAL, C. (1995). Application of bundle methods to the unit-commitment problem. Rapport technique 0184, INRIA. [124](#)
- [Lenoir, 2005] LENOIR, A. (2005). Décomposition proximale appliquée à la gestion de production. Rapport technique, EDF R&D. Rapport de stage. [139](#)
- [Lenoir, 2008] LENOIR, A. (2008). *Modèles et algorithmes pour la planification de production à moyen terme en environnement incertain : Application de méthodes de décomposition proximales*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont II, France. [38](#)
- [Lenoir et Mahey, 2007] LENOIR, A. et MAHEY, P. (2007). Global and adaptive scaling in a separable augmented Lagrangian algorithm. *Optimization on line*. [38](#), [80](#)
- [Lions et Mercier, 1979] LIONS, P. L. et MERCIER, B. (1979). Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16(6):964–979. [85](#)
- [Løkketangen et Woodruff, 1996] LØKKETANGEN, A. et WOODRUFF, D. L. (1996). Progressive hedging and tabu search applied to mixed integer (0,1) multistage stochastic programming. *Journal of Heuristics*, 2(2):111–128. [93](#)
- [Malick, 2004] MALICK, J. (2004). A dual approach to semidefinite least-squares problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26:272–284. [51](#)
- [Malick et col., 2009] MALICK, J., POVJ, J., RENDL, F. et WIEGELE, A. (2009). Regularization methods for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 20:336–356. [51](#)

- [Mangasarian et Fromovitz, 1967] MANGASARIAN, O. L. et FROMOVITZ, S. (1967). The fritz john necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 17:37–47. [151](#)
- [Mifflin et Sagastizábal, 2002] MIFFLIN, R. et SAGASTIZÁBAL, C. (2002). Proximal points are on the fast track. *Journal of Convex Analysis*, 9(2):563–579. [32](#)
- [Minty, 1962] MINTY, G. J. (1962). Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. *Duke Mathematical Journal*, 29:341–346. [33](#)
- [Moré et Toraldo, 1991] MORÉ, J. J. et TORALDO, G. (1991). On the solution of large quadratic programming problems with bound constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 1(1):93–113. [32](#)
- [Moreau, 1965] MOREAU, J. (1965). Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93:273–299. [53](#)
- [Mulvey et Ruszczyński, 1992] MULVEY, J. M. et RUSZCZYŃSKI, A. (1992). A diagonal quadratic approximation method for large-scale linear programs. *Operations Research Letters*, 12(4):205–215. [25](#), [37](#)
- [Mulvey et Ruszczyński, 1995] MULVEY, J. M. et RUSZCZYŃSKI, A. (1995). A new scenario decomposition method for large-scale stochastic optimization. *Operations Research*, 43(3):477–490. [24](#), [25](#)
- [Mulvey et Vladimirov, 1989a] MULVEY, J. M. et VLADIMIROV, H. (1989a). Applying the progressive hedging algorithm to stochastic generalized networks. *Annals of Operations Research*, 31(1-4):399–424. [87](#), [88](#), [89](#), [90](#)
- [Mulvey et Vladimirov, 1989b] MULVEY, J. M. et VLADIMIROV, H. (1989b). Stochastic network optimization models for investment planning. *Annals of Operations Research*, 20(1-4):187–217. [87](#)
- [Nemirovski et Shapiro, 2005] NEMIROVSKI, A. et SHAPIRO, A. (2005). On complexity of stochastic programming problems. In *Continuous optimization*, volume 99 de *Appl. Optim.*, pages 111–146. Springer, New York. [26](#)
- [Nesterov et al., 1999] NESTEROV, Y., TODD, M. J. et YE, Y. (1999). Infeasible-start primal-dual methods and infeasibility detectors for nonlinear programming problems. *Mathematical Programming*, 84(2):227–267. [41](#)
- [Omojokun, 1991] OMOJOKUN, E. O. (1991). *Trust region algorithms for optimization with nonlinear equality and inequality constraints*. Thèse de doctorat, Department of Computer Science, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309. [68](#)
- [Ouorou, 2000] OUOROU, A. (2000). A primal-dual algorithm for monotropic programming and its application to network optimization. *Computational Optimization and Applications*, 15(2):125–143. [39](#)
- [Ouorou, 2007] OUOROU, A. (2007). A proximal subgradient projection algorithm for linearly constrained strictly convex problems. *Optimization Methods & Software*, 22(4):617–636. [39](#)
- [Pflug, 2001] PFLUG, G. C. (2001). Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization. *Mathematical Programming*, 89(2):251–271. [17](#), [22](#)
- [Porcheron et al., 2011] PORCHERON, M., BARTY, K. et KADDOUR, B. (2011). Using stochastic programming to compute usage values for the french nuclear power reactors. Paris, France. COPI (Conference on Optimization and Practices in Industry). Présentation orale. [120](#)
- [Powell, 1969] POWELL, M. J. D. (1969). A method for nonlinear constraints in minimization problems. In *Optimization (Sympos., Univ. Keele, Keele, 1968)*, pages 283–298, London. Academic Press. [29](#), [31](#), [35](#), [39](#), [51](#)

- [Powell, 1978] POWELL, M. J. D. (1978). A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In WATSON, G., éditeur : *Numerical Analysis Dundee 1977*, numéro 630 de Lecture Notes in Mathematics, pages 144–157. Springer-Verlag, Berlin. 68
- [Powell et Yuan, 1991] POWELL, M. J. D. et YUAN, Y. (1991). A trust region algorithm for equality constrained optimization. *Mathematical Programming*, 49:189–211. 68
- [Quadrat, 2007] QUADRAT, J.-P. (2007). Notes de cours de commande optimale stochastique. Cours du DEA MMME, Université Paris 1. 16
- [Reich, 1977] REICH, S. (1977). On infinite products of resolvents. *Rend. Classe Sci. Fis. Mat. e Nat. Accad. Naz. Lincei Ser. VIII, LXIII*, Fasc. 5. 49, 69
- [Robinson, 1991] ROBINSON, S. M. (1991). Extended scenario analysis. *Annals of Operations Research*, 31(1-4):385–397. 93
- [Rockafellar, 1970] ROCKAFELLAR, R. T. (1970). *Convex Analysis*. Numéro 28 de Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 50, 55, 57
- [Rockafellar, 1971] ROCKAFELLAR, R. T. (1971). New applications of duality in convex programming. In *Proceedings of the 4th Conference of Probability, Brasov, Romania*, pages 73–81. 51
- [Rockafellar, 1973a] ROCKAFELLAR, R. T. (1973a). A dual approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization. *Mathematical Programming*, 5:354–373. 53
- [Rockafellar, 1973b] ROCKAFELLAR, R. T. (1973b). The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 12:555–562. 30, 35, 51
- [Rockafellar, 1974a] ROCKAFELLAR, R. T. (1974a). Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 12:268–285. 30, 34, 51
- [Rockafellar, 1974b] ROCKAFELLAR, R. T. (1974b). *Conjugate Duality and Optimization*. Numéro 16 de Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa. 55
- [Rockafellar, 1976a] ROCKAFELLAR, R. T. (1976a). Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 1(2):97–116. 34, 35, 39, 40
- [Rockafellar, 1976b] ROCKAFELLAR, R. T. (1976b). Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14(5):877–898. 49, 85, 101
- [Rockafellar et Salinger, 2003] ROCKAFELLAR, R. T. et SALINGER, D. H. (2003). Dynamic splitting: An algorithm for deterministic and stochastic multiperiod optimization. *Stochastic Programming e-print series*, 6. 25
- [Rockafellar et Wets, 1991] ROCKAFELLAR, R. T. et WETS, R. (1991). Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty. *Mathematics of Operations Research*, 16(1):119–147. xv, xvii, 73, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 89, 96, 102, 113, 127, 138
- [Romanet, 2003a] ROMANET, F. (2003a). SOPRANO : Méthodologie générale de résolution. Rapport technique MM-31/02/017/A, EDF R&D. Rapport interne. 123
- [Romanet, 2003b] ROMANET, F. (2003b). SOPRANO : Présentation et spécifications fonctionnelles. Rapport technique MM-31/02/017/A, EDF R&D. Rapport interne. 120
- [Romanet, 2003c] ROMANET, F. (2003c). SOPRANO : Construction des arbres d'aléas. Rapport technique MM-31/02/019/A, EDF R&D. Rapport interne. 18, 124
- [Rosa et Ruszczyński, 1996] ROSA, C. H. et RUSZCZYŃSKI, A. (1996). On augmented Lagrangian decomposition methods for multistage stochastic programs. *Annals of Operations Research*, 64: 289–309. 37

- [Ruszczynski, 1995] RUSZCZYŃSKI, A. (1995). On convergence of an augmented Lagrangian decomposition method for sparse convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 20(3):634–656. [37](#)
- [Ruszczynski, 2003] RUSZCZYŃSKI, A. (2003). Decomposition methods. In *Stochastic programming*, volume 10 de *Handbooks in operation research and management science*, pages 141–211. Elsevier, Amsterdam. [85](#)
- [Schramm et Zowe, 1992] SCHRAMM, H. et ZOWE, J. (1992). A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: Conceptual idea, convergence analysis, numerical results. *SIAM Journal on Optimization*, 2(1):121–152. [89](#)
- [Shapiro, 2006] SHAPIRO, A. (2006). On complexity of multistage stochastic programs. *Operations Research Letters*, 34(1):1–8. [16](#), [23](#), [25](#)
- [Shapiro, 2010] SHAPIRO, A. (2010). Computational complexity of stochastic programming: Monte Carlo sampling approach. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume IV*, pages 2979–2995, New Delhi. Hindustan Book Agency. [26](#)
- [Shapiro et Sun, 2004] SHAPIRO, A. et SUN, J. (2004). Some properties of the augmented Lagrangian in cone constrained optimization. *Mathematics of Operations Research*, 29:479–491. [51](#)
- [Solodov et Svaiter, 1999a] SOLODOV, M. V. et SVAITER, B. F. (1999a). A hybrid approximate extragradient-proximal point algorithm using the enlargement of a maximal monotone operator. *Set-Valued Analysis*, 7:323–345. [68](#), [150](#)
- [Solodov et Svaiter, 1999b] SOLODOV, M. V. et SVAITER, B. F. (1999b). A hybrid projection-proximal point algorithm. *Journal of Convex Analysis*, 6:59–70. [68](#), [150](#)
- [Solodov et Svaiter, 2000] SOLODOV, M. V. et SVAITER, B. F. (2000). An inexact hybrid generalized proximal point algorithm and some new results on the theory of Bregman functions. *Mathematics of Operations Research*, 25:214–230. [68](#), [150](#)
- [Sommerwell, 1998] SOMMERWELL, M. (1998). Progressive hedging in parallel. In *Proceedings of the 33rd ORSNZ annual conference*. [91](#)
- [Spingarn, 1983] SPINGARN, J. E. (1983). Partial inverse of a monotone operator. *Applied Mathematics and Optimization*, 10(3):247–265. [93](#)
- [Spingarn, 1987] SPINGARN, J. E. (1987). A projection method for least-squares solutions to overdetermined systems of linear inequalities. *Linear Algebra and its Applications*, 86:211–236. [49](#), [63](#), [69](#)
- [Stephanopoulos et Westerberg, 1975] STEPHANOPOULOS, G. et WESTERBERG, W. (1975). The use of Hestenes’ method of multipliers to resolve dual gaps in engineering system optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 15:285–309. [37](#)
- [Strip et col., 2007] STRIP, D. R., WATSON, J.-P. et WOODRUFF, D. L. (2007). Progressive hedging innovations for a stochastic spare parts support enterprise problem. *Naval Research Logistics*. [88](#), [90](#), [91](#)
- [Strugarek, 2004] STRUGAREK, C. (2004). Quelle approche pour discrétiser un problème d’optimisation stochastique ? Rapport technique HR-31/04/013/A, EDF R&D. Rapport interne. [25](#)
- [Vardi, 1985] VARDI, A. (1985). A trust region algorithm for equality constrained minimization: convergence properties and implementation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 22:575–591. [68](#)
- [Watson et Woodruff, 2011] WATSON, J.-P. et WOODRUFF, D. L. (2011). Progressive hedging innovations for a class of stochastic mixed-integer resource allocation problems. *Computational Management Science*, 8(4):355–370. [93](#)

- [Wets, 1989] WETS, R. J.-B. (1989). The aggregation principle in scenario analysis and stochastic optimization. *In Algorithms and model formulations in mathematical programming*, volume 51, pages 91–113. Springer, Berlin. [76](#), [86](#), [92](#)
- [Zhao, 2005] ZHAO, G. (2005). A Lagrangian dual method with self-concordant Barriers for multi-stage stochastic convex programming. *Mathematical Programming*, 102(1):1–24. [89](#)

Index

A	
adhérence	xix
algorithme	<i>voir aussi</i> méthode
proximal	34
SALA	38, 92
application	
fermement non expansive	33
non expansive	33
arbre	
de scénarios	16, 73
déterministe	127
B	
base canonique	xx
biconjuguée d'une fonction	xx
borne d'erreur	33
branchement	16
C	
cardinal d'un ensemble	xix
cas convexe	30
composition de fonctions	xx
cône	
asymptotique	xix
normal	xix
conjuguée de Fenchel	xx
contrainte	
de fonctionnement	10, 11, 121
de non-anticipativité	74
dépendant d'un nœud	108
dynamique	107, 122
physique . <i>voir</i> contrainte de fonctionnement	
convergence	
linéaire	35
linéaire globale	35
coût	
marginal	10, 130
proportionnel de production	9
système	119
D	
défaillance	120
divergence arithmétique	44
E	
distance à un ensemble	xix
domaine	
d'une fonction	xix
d'une multifonction	xix
E	
effacement	13
empilement	9
ensemble admissible	xxi
enveloppe	
affine	xix
inférieure	xx
supérieure	xx
épigraphe d'une fonction	xx
équilibre offre-demande	8
F	
fonction	
caractéristique	xix
coercive	37
conjuguée	<i>voir</i> conjuguée de Fenchel
de Bellman	11, 120
de mérite	149
duale	34
fermée	xix, 37
identité	xx
marginale	82
propre	37
semi-continue inférieurement ..	<i>voir</i> fonction
fermée	
G	
gradient	xx
graphe d'une multifonction	xx
groupe marché	120
H	
heure de pointe	12
I	
image	
d'une matrice	xx
d'une multifonction	xx

- indices des contraintes d'un scénario 107
intérieur relatif xix
- L**
- lagrangien
 augmenté 29
 classique *voir* lagrangien ordinaire
 ordinaire 29
 simple *voir* lagrangien ordinaire
- M**
- management d'énergie 7
marge d'exploitation 8
matrice
 diagonale
 étendue d'un arbre à un peigne 105
 par blocs xx
 identité xx
 symétrique définie positive xx
méthode *voir aussi* algorithme
 des multiplicateurs 31
modulation 11
 fatale 11
 volontaire 11
multifonction xix
 inverse 33
 univoque 33
- N**
- nœud 16
 appartenant à un scénario 103
non-anticipativité ... 15, *voir aussi* contrainte de
 non-anticipativité
- norme
 $-r$ 86
 associée à un produit scalaire xx
 associée à une matrice xxi
 euclidienne *voir* norme ℓ_2
 ℓ_∞ xx
 ℓ_2 xx
- O**
- opérateur
 d'extension 104
 de concentration 104
 fortement monotone 33
 monotone 33
 monotone maximal 33
 proximal 34
orthant positif xix
- P**
- paquets de scénarios 75
pas de temps d'un nœud xxi, 103
peigne 17
pénalisation exacte 30
point proximal xx
point-selle 82
pompage 13
probabilité d'un nœud 105
problème
 convexe 30
 dual 34
 interne 31
 non réalisable 47
 primal 29
production fatale 9
produit
 de Hadamard xx
 scalaire
 associé à une matrice xx
 euclidien xx
 stochastique xxi
profondeur du marché 8, 120
projection xix
- R**
- racine d'une matrice xx
résolvante 33
risque 1% 8
RTE 10
- S**
- saut de dualité 34
scénario 16
 dans lequel une contrainte est présente . xxi,
 107
 passant par un nœud xxi, 103
solution
 d'un problème d'optimisation xxi
 duale 34
 primale 29
soprano 120
 -rep 125
 -scénarios 127
sous-différentiel xx
stratégie
 admissible 76
 implémentable 76
 réalisable 76
suite xx

T

télé réglage 13

thermique

 à flammes 8

 classique *voir* à flammes

transposée xx

turbinage 13

U

uniforme positivité 101

V

valeur

 d'usage 9, 11, 120, 125

 de Bellman 11, 124

 de l'eau 12

 optimale d'un problème d'optimisation .. xxi

voisinage xix