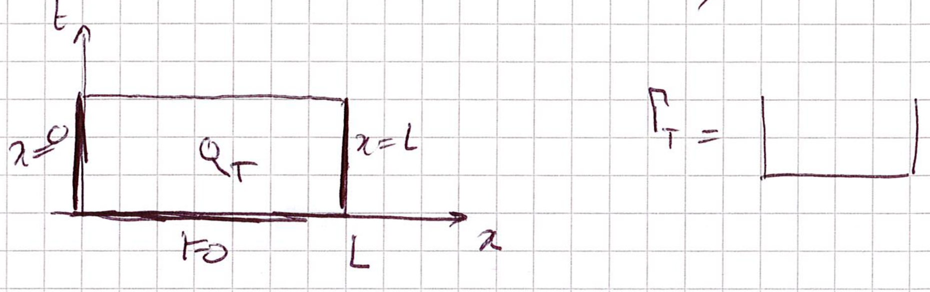
Equation de la chaleur : principe du maximum

Ch1

(1) $\partial_t u - D\partial_x^2 u = 0 \qquad 0 \leq x \leq L, \qquad 0 \leq t \leq T$

Thm | u solution C^2 de (1).
le maximum de u est atteint soit à l'instant initial $t=0$
soit sur les bords latéraux $x=0$, ou $x=L$.



Rq Forme "forte" du ppe-max : le max est atteint seulement sur le bord, sauf si u est constante ($\max_{Q_T} u < \max_{\Gamma_T} u$)

Rq $\hat{m}$ chose pour le minimum ($\min u = \max(-u)$)

Preuve

Rappel 1D | si $f \in C^2(a,b)$ admet un max en $x_0 \subset]a,b[$
alors $f'(x) = 0$ et $f''(x) \leq 0$

Preuve (pour f'') : Taylor $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + h^2\varepsilon(h)$
$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h)$

$0 \geq \frac{1}{h^2}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) = f''(x_0) + \varepsilon(h)$ | $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon(h) = 0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

⚠ Pas < 0 ex $f(x) = x^4$

Extension à 2 variables : si maximum en x_0, t_0 à l'intérieur

$\partial_t u(x_0, t_0) = \partial_x u(x_0, t_0) = 0$ et $\partial_x^2 u(x_0, t_0) \geq 0$

motivation si $\partial_x^2 u < 0$ (pas vrai!) alors

si max à l'intérieur $0 = \partial_t u - \partial_x^2 u > 0$ pas possible.

~~Astuce~~:

Soit M le max de u sur les 3 côtés (atteint, compact)

Mq $\quad u(x,t) \le M \quad \forall (x,t) \in Q_T$

Astuce $\varepsilon > 0$ fixé

$$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$$

si on mq $v(x,t) \le M + \varepsilon L^2$ on aura

$$u(x,t) \le M + \varepsilon(L^2 - x^2) \le M + \varepsilon L^2$$

Vrai $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \quad u(x,t) \le M$

Pour v: $\quad v(x,t) \le M + \varepsilon L^2 \quad$ sur les 3 bords.

v vérifie $\partial_t v - D\partial_x^2 v = \partial_t u - D\partial_x^2 u - 2D\varepsilon = -2D\varepsilon < 0 \quad (2)$

Si v atteint son max à l'intérieur ($0 < x_0 < L$, $0 < t < T$), on a

$\partial_t v = 0$, $\partial_x^2 v \le 0$, contradiction avec (2)

pas de max à l'intérieur

si v atteint son max en $0 < x_0 < L$, $t_0 = T$,

toujours vrai $\partial_x v = 0$, $\partial_x^2 v \le 0$, mais $v_t \geq 0$:

$$\partial_t v(x_0, T) = \lim_{h \to 0^+} \frac{v(x_0,T) - v(x_0, T-h)}{h} \geq 0$$

et $\partial_t v - D\partial_x^2 v \geq 0$, contradiction avec (2).

Donc $\max_{Q_T} v \le M + \varepsilon L^2$ et fini ∎

Interprétation: chauffage d'un barreau: + chaud, + froid soit au bouts soit au début.

le max ↘, le min ↗, ⇒ devient + homogène.

Conséquence: unicité pour le pb aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t) \end{cases} \qquad Q_T = \{ 0 \le x \le L \quad 0 \le t \le T \}$$

LINEARITÉ $\Rightarrow$ si 2 solutions u_1, u_2, $w = u_1 - u_2$ sol de

$$\begin{cases} \partial_t w - D\partial_x^2 w = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 \end{cases}$$

Ppe max $\quad \max u \le 0$, $\min u \ge 0$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{w = 0}}$ $\forall (x,t) \in Q_T$

~~Stabilité en norme L^∞:~~

~~si $f = 0$, $g = h = 0$, CI φ_1, φ_2~~

~~$\max u_1(x,t) - u_2(x,t) \le \max |\varphi_1 - \varphi_2|$~~

~~$u_1(x,t) - u_2(x,t) \ge \min |\varphi_1 - \varphi_2|$~~

~~$\Rightarrow \max_{Q_T} |u_1 - u_2| \le \max_{0 \le x \le L} |\varphi_1 - \varphi_2|$~~

Monotonie : $\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t) \end{cases}$ $\quad \varphi, g, h \ge 0 \Rightarrow \underline{u \ge 0}$

$(\min u \ge \min\{\varphi, g, h\} \ge 0)$

Stabilité L^∞:

$v = \|\varphi\|_I - u$, $\quad \partial_t v - D\partial_x^2 v = 0 \quad v(x,0) = \|\varphi\| - \varphi, \quad v(0,t) = v(L,t) = \|\varphi\|$

monotonie $v \ge 0 \Rightarrow u \le \|\varphi\|$

et aussi $u \ge -\|\varphi\|$ $[v = \|\varphi\| + u \Rightarrow]$

$\Rightarrow \boxed{\max |u| \le \|\varphi\|}$

Inégalité d'énergie pour l'équation de la chaleur

① Pb homogène

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = 0 & 0<x<L, \quad 0<t<T \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & 0<t<T \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0<x<L \end{cases}$$

$\varphi \in C^0$ sol $u \in C^0([0,L]\times[0,T]) \cap C^{2,1}([0,L]\times]0,T])$

<u>Théorème</u> | La quantité $E(t) = \int_0^L |u(x,t)|^2 dx$ est une ~~quantité~~ fonction décroissante de t.

<u>Dem</u> On calcule $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\int_0^L |u|^2 dx$

La régularité de $(x,t) \mapsto u(x,t)$ (on travaille sur un compact en x), (la fonction $\partial_t |u|^2$ est continue donc intégrable sur $[0,L]$) justifie la dérivation sous le signe $\int$:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L \partial_t |u|^2 dx = 2\int_0^L u\,\partial_t u\, dx = 2D\int_0^L u\,\partial_x^2 u\, dx \quad \text{(par l'équation)}$$

On intègre par parties :

$$\frac{dE}{dt} = -2D\int_0^L |\partial_x u|^2 dx + 2D\,(u\partial_x u)\Big|_0^L$$

le terme " tout intégré " est nul à cause des conditions aux limites.

$$\frac{dE}{dt} = -2D\int_0^L |\partial_x u|^2 \leq 0 \Rightarrow t \mapsto E(t) \text{ est } \searrow$$

<u>Conséquence</u> $\forall t>0, \quad E(t) \leq E(0) = \int_0^L |\varphi(x)|^2 dx$

<u>Conséquence</u> : On retrouve l'unicité pour le problème avec un second membre, et des conditions aux limites de type Dirichlet non-homogène.

Eq chaleur général

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = f(x,t) & 0<x<L, \quad 0<t<T \\ u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Par linéarité : si $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, $h \equiv 0$, $\varphi \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ sur $[0,L] \times [0,T]$

Energie : $E(t) \leq E(0) = 0 \Rightarrow E(t) = 0, \ \forall t$

$$\int |u|^2 dx = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \quad \forall x, \forall t$$

$\blacksquare$

Conséquence : Stabilité en norme L^2 ($f \equiv 0$, $g = h \equiv 0$)

$$\int_0^L |u|^2 dx \leq \int_0^L |\varphi|^2 dx$$

$$\forall t \qquad \|u(t)\|_{L^2(0,L)} \leq \|u_0\| = \|\varphi\|_{L^2(0,L)}$$

[Rq on regarde la solution comme $t \to u(\cdot,t)$, avec

$$u(t)(x) = u(x,t) \quad \text{et} \quad u(\cdot,t) \in L^2(0,L) \ \forall t$$

donc " $u \in \mathcal{C}^0(0,T; L^2(0,L))$]

Rq Si CL Neumann : $\partial_x u(0,t) = 0$, $\partial_x u(L,t) = 0$

Pareil : Dans l'IPP, le terme tout intégré est aussi nul.

Les conséquences (unicité, stabilité, restent vraies)

Equation de la chaleur sur un intervalle:
Solution par série de Fourier

I CL de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = f(x,t) & 0<x<L, \quad 0<t<T \\ u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = h(t) & 0<t<T \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0<x<L \end{cases}$$

1 Cas homogène, solution regulière

On prend $f(x,t) \equiv 0$, $g(t) \equiv 0$, $h(t) \equiv 0$

et on cherche $u \in C^0([0,L]\times[0,T])$,

$u \in C^{2,1}([0,L]\times]0,T])$ (C^2 espace / C^1 tps)

0 exclu $\longleftarrow$ en fait $C^\infty([0,L]\times]0,T])$

Solution à variable separées pour EDP + CL (pas CI)

$u(x,t) = X(x) \times T(t)$?

$\partial_t u = X(x)\,T'(t)$, $\partial_x u = X'(x)\,T(t)$, $\partial_x^2 u = X''(x)\,T(t)$

notation $\frac{dT}{dt} = \dot{T}$ $\quad$ $X(x)\dot{T}(t)$

On veut donc $X(x)\,\dot{T}(t) = D\,X''(x)\,T(t)$ $\quad \forall x, \forall t$

$+ \; X(0)\,T(t) = 0$, $X(L)\,T(t) = 0$, $\quad \forall t$

On divise par $X(x)T(t)$ (si possible, solu 0 pas $\equiv 0$!)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{\dot{T}(t)}{T(t)}, & \forall x, \forall t \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

<u>Remarque fondamentale</u> : A gauche fonction de x seul
A droite ——— de t seul

les deux membres sont égaux à une même constante.

Il existe donc une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ (a priori, λ est complexe) telle que

$$\forall x \in [0,L] \quad \forall t \in [0,T) \qquad D\frac{X''}{X}(x) = \frac{\dot{T}}{T}(t) = -\lambda$$

[le signe "$-$" est arbitraire et sera justifié plus loin)

On doit donc chercher λ tq $\begin{cases} \exists X : [0,L] \to \mathbb{C}, \\ \exists T : [0,T] \to \mathbb{C} \end{cases}$ tq

$$\begin{cases} DX'' = -\lambda X & 0<x<L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \dot{T}(t) = -\lambda T \quad 0<t<T$$

[on "oublie" la condition initiale]

<u>Problème en X</u> $\quad DX'' = -\lambda X,$

$\Rightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \ (A,B) \neq (0,0)$ tq

$$X(x) = A\exp(i\beta x) + B\exp(-i\beta x)$$

où $\beta \in \mathbb{C}$ est tel que $\underline{\beta^2 = +\frac{\lambda}{D}}$

La prise en compte des CL ("condition de quantification") entraîne

$x = 0 \qquad A + B = 0$

$x = L \qquad A\exp(i\beta L) + B\exp(-i\beta L) = 0$

et si on veut $(A,B) \neq (0,0)$, on doit avoir

$$\exp(2i\beta L) = 1$$

soit tq $\beta L \in \{k\pi,\ k \in \mathbb{N}^*\}$

Finalement $\qquad \lambda = D\beta = \frac{D}{L^2}k^2\pi^2$, pour $k \in \mathbb{N}^*$

et à une normalisation près, $X(x) = \sin\left(k\pi\frac{x}{L}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$

<u>Rq</u> On a donc $\lambda > 0$. Les nombres $\lambda_k = \frac{Dk^2\pi^2}{L^2}$ sont les "<u>valeurs propres</u>" du problème, les X_k sont les "<u>fonctions propres</u>"

On notera $\lambda_k = \frac{D}{L^2} k^2 \pi^2$

$k \in \mathbb{N}^*$

$\varphi_k(x) = \sin\left(k\pi \frac{x}{L}\right)$

Problème en T : Pour λ_k, on résoud

$$\dot{T}(t) = -\lambda_k T = -\frac{D}{L^2} k^2\pi^2 T$$

soit $T(t) = T(0) \exp(-\lambda_k t) = T(0) \exp\left(-\frac{D k^2 \pi^2}{L^2} t\right)$

Conclusion (partielle) :

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$u_k(x,t) = \varphi_k(x) \exp(-\lambda_k t)$$

est solution de l'EDP + conditions aux limites

⚠ Pas la condition initiale pour le moment

Rq physique λ_k a bien une dimension de $[s^{-1}]$ (inverse d'un temps)

Comme $\lambda_1 < \lambda_2 \leq$ —— et $\lambda_k \to \infty$

$\frac{1}{\lambda_1}$ est un temps caractéristique du problème

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{L^2}{D} \frac{1}{\pi^2}$$

Comment satisfaire la CI ?

Idée de Fourier : Linéarité $\Rightarrow \sum_{k=1}^{K} a_k u_k$ sol EDP + CL, $\forall K$

Somme "infinie" ? $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} \sin k\pi \frac{x}{L}$$

Série de Fourier en x, coeff dépendant du temp

1) Identifier les coeff a_k ?
2) Justifier ?

On utilise la CI

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

$$= \varphi(x)$$

"Donc" [à justifier] les a_k sont les coeff Fourier de φ

Ici développement en sinus (pourquoi ?), intervalle $[0,L]$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx}$$

Donc (formellement), on a une solution de l'EDP + CI + CL.

<u>Justification ?</u> cf LeDret - Lucquin (p 222 – 225)

Second membre, le principe de Duhamel

On definit "l'opérateur solution"

$$\varphi \xrightarrow{S(t)} \cancel{u(x,t)},\quad u(x,t) = \sum a_k e^{-\lambda_k t} \sin k\pi \frac{x}{L}$$

$$\varphi(x) = \sum a_k \sin k\pi \frac{x}{L}$$

$S(t) : C^0([0,L]) \longrightarrow C^0([0,L])$ (p.ex)

Pb avec 2nd membre

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_x^2 u = f(x,t) & 0<x<L,\ 0<t<T \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

~~pas de~~ Dvt f en serie Fourier $f(x,t) = \sum f_k(t) \sin k\pi \frac{x}{L}$, $\varphi(x) = \sum a_k^0 \sin k\pi \frac{x}{L}$

on cherche $u(x,t) = \sum a_k(t) \sin k\pi \frac{x}{L}$

Si on peut dériver terme a terme:

$$\begin{cases} \dot a_k + \underbrace{D\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}_{\lambda_k} a_k = f_k \\ a_k(0) = a_k^0 \end{cases}$$

on mq $\quad a_k(t) = a_k^0 e^{-\lambda_k t} + \int_0^t f_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds$

et la sol se met sous la forme

$$\boxed{u(x,t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t-s) \underbrace{f(s)}_{f(x,s)} ds}$$

⚠ Justification + délicate, pour le 2e terme

$$w_k(t) = \int_0^t f_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds.$$

On ne peut pas dériver sous l'$\int$: $\quad \int_0^t f_k(s) \underbrace{\lambda_k e^{-\lambda_k(t-s)}}_{\lambda_k(t-s) \times \frac{1}{t-s}} ds$

$\left|\lambda_k(t-s) e^{-\lambda_k(t-s)}\right| \leq C$ mais $\quad \int = \int_0^t f_k(s) \frac{1}{t-s} ds \longrightarrow$ singularite

cf Larsson-Thomée p.119