Mig « Commande »

Séance n° 3 – 3 décembre 2002

M. Kern

Les scripts utilisés dans cette session peuvent être téléchargés à l'URL `http://www-rocq.inria.fr/~kern/Teaching/ENSMP/Mig02.html`

Exercice I Utilisation de la commande `ode`

1) Équation scalaire

Calculer la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 - t, \quad t \in [0,5] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tracer le graphe de la solution.

Tracer les lignes de champ du champ de vecteurs associé (commande `champ`, `f` est la fonction définissant le second membre de l'équation) :

```
t=-3:5; nt=length(t);
y=-3:3; ny=length(y);
ft=ones(nt, ny);
fy=feval(t, y, f)
xbasc(); champ(t, y, ft, fy)
```

2) Système

Le système différentiel de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) = bx(t)y(t) - dy(t), \qquad a,b,c,d > 0 \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases}$$

modélise le comportement d'une population de proies ($x(t)$, par exemple des lapins), en présence d'une population de prédateurs ($y(t)$, par exemple des renards). En l'absence de renards, les lapins se reproduisent, en l'absence de lapins, les renards meurent de faim, et les renards mangent les lapins.

Pour les simulations, on prendra $a = 3, b = 1$ et $d = 2$.

Calculer la courbe intégrale passant par le point $(2,2)$. Tracer cette courbe dans l'espace (commande `param3d`).

Tracer sur une même figure le champ de vecteurs de l'équation différentielle (commande `fchamp`), et la trajectoire dans le plan (x,y) (option `frameflag=0` de la commande `plot2d`).

3) Équation du second ordre

On considère l'équation de Van der Pol :

$$\begin{cases} y'' = \mu(1-y^2)y' - y \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Résoudre ce problème en prenant $\mu = 0.4, y_0 = -2.5, y_1 = 2.5$. Tracer les graphes de $y(t)$ et $y'(t)$, puis la trajectoire dans le plan (y,y'). (Pour utiliser `ode`, il faut formuler cette équation sous forme d'un système du premier ordre).

4) Utilisation du Jacobien Reprendre la question 2) en calculant le jacobien du système

Exercice II Une méthode instable

Nous avons vu que la méthode à deux pas définie par

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h(4f_{n+1} + 2fn)$$

est instable.

Exécuter le script `ShowUnstab.sce`. Est-il utile de « faire tendre h vers 0 » ?

Exercice III Ordre des méthodes de Runge-Kutta

Exécuter le fichier `ShowRK`. Il utilise plusieurs méthodes de Runge Kutta, d'ordre variant de 1 à 5 pour résoudre l'équation différentielle $y' = y, y(0) = 1$ pour $t \in [0,1]$, avec des pas variant de $5/32$ à $5/512$.

Le script calcule une matrice `E` contenant les erreurs pour les différents pas et les différents ordres. La commande `log10(E(5,:))-log10(E(1,:))` permet d'obtenir l'ordre « numérique » des méthodes.

Exercice IV Un problème raide

Nous avons vu (à la PC 2) que l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = -\lambda(y - \cos x) \qquad \lambda > 0 \text{ (en fait, } \lambda \gg 1) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

nécessitait une méthode implicite pour s'affranchir de la contrainte de stabilité.

Exécuter le script `ShowStiff.sce`. Vous pouvez faire varier les paramètres suivants :

λ : plus λ est grand, plus le problème est raide ;

$\mathbf{y}(\mathbf{0})$: contrôle la durée du régime transitoire (plus cette valeur est proche de 1, moins le transitoire est visible) ;

$\mathbf{t_f}$: le temps final d'intégration ;

h : le pas d'intégration ;

Méthode : Explicite (avec une contrainte de stabilité) ou implicite (sans contrainte de stabilité).

Vérifier numériquement la condition de stabilité $h < 2/\lambda$ (l'instabilité se manifeste dès que l'on franchit la limite).

Si l'on utilise une méthode implicite, jusqu'à quelle valeur de h peut-on raisonnablement aller ?

Exercice V Problème des trois corps

Une version restreinte du problème des trois corps considère la terre de masse $\mu' = 1 - \mu$, la lune de masse $\mu = 0.012277471$, et un satelliste de masse négligeable en mouvement dans un plan. On montre que, dans un système de coordonnées approprié, les équations du mouvement sont :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_1'' & = & u_1 + 2u_2' - \hat{\mu}\dfrac{u_1+\mu}{D_1} - \mu\dfrac{u_1-\hat{\mu}}{D_2}, \\ u_2'' & = & u_2 + 2u_1' - \hat{\mu}\dfrac{u_2}{D_1} - \mu\dfrac{u_2}{D_2}; \end{array} \right. \tag{2}$$

avec $D_1 = ((u_1+\mu)^2 + u_2^2)^{3/2}$, $D_2 = ((u_1-\hat{\mu})^2 + u_2^2)^{3/2}$.

Pour les conditions initiales

$$u_1(0) = 0.994,\ u_2(0) = 0,\ u_1'(0) = 0,\ u_2'(0) = -2.0015851063791,$$

la solution est périodique de période légèrement inférieure à 17.1 (l'orbite correspondante s'appelle une orbite d'Arenstorf).

Le script `aren.sce` compare l'intégration de ce système différentiel par une méthode de *à pas fixe*, avec l'intégrateur à pas variable de Scilab.

Combien de faut-il de pas de temps pour que l'orbite paraisse *qualitativement* correcte ?

Cet exercice fournit une forte motivation pour l'utilisation des méthodes à pas adaptatif ! On pourra visualiser également la séquence de pas de temps choisie par le solveur de Scilab.