Calcul de dépendances dans les boucles
Méthode d'élimination de Fourier-Motzkin

F. Thomasset
INRIA - Rocquencourt
Projet A3

http://www-rocq.inria.fr/~thomasse/dea/

http://www-rocq.inria.fr/~thomasse/dea/articles.html

7 décembre 2001

Méthode d'élimination de Fourier-Motzkin

Permet de tester l'existence de solutions dans $\mathbf{R}^n$ d'un système d'inéquations
(les égalités sont déjà éliminées)

"Omega-test" (Bill Pugh) :
raffinement de Fourier-Motzkin :
donne des réponses exactes dans les entiers

Un système d'inéquations :

$$\begin{array}{cccc} 2x_1 & -11x_2 & \leq & 3 \\ -3x_1 & +2x_2 & \leq & -5 \\ x_1 & +3x_2 & \leq & 4 \\ -2x_1 & & \leq & -3 \end{array}$$

On va éliminer x_2 du système

$\mathcal{I}_1$: inéquations du système dans lesquelles le coefficient de x_2 est > 0

$\mathcal{I}_2$: inéquations du système dans lesquelles le coefficient de x_2 est < 0

$\mathcal{I}_0$: inéquations du système dans lesquelles le coefficient de x_2 est $= 0$

$$\left.\begin{array}{rrcr} -3x_1 & +2x_2 & \leq & -5 \\ x_1 & +3x_2 & \leq & 4 \end{array}\right\} \mathcal{I}_1$$

$$\left.\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -11x_2 & \leq & 3 \end{array}\right\} \mathcal{I}_2$$

$$\left.\begin{array}{rrcr} -2x_1 & & \leq & -3 \end{array}\right\} \mathcal{I}_0$$

$\mathcal{I}_1$: diviser par le coefficient de x_2

$$\left.\begin{array}{rrcr} -(3/2)x_1 & +x_2 & \leq & -(5/2) \\ (1/3)x_1 & +x_2 & \leq & (4/3) \end{array}\right\} \mathcal{I}_1$$

$\Longrightarrow$ majorants pour x_2 en fonction de x_1 :

$$\left.\begin{array}{rcrr} x_2 & \leq & (3/2)x_1 & -(5/2) \\ x_2 & \leq & -(1/3)x_1 & +(4/3) \end{array}\right\} \mathcal{I}_1$$

$\mathcal{I}_2$: diviser par l'opposé du coefficient de x_2

$$\left.\begin{array}{rrcr} -(2/11)x_1 & +x_2 & \geq & -(3/11) \end{array}\right\} \mathcal{I}_2$$

$\Longrightarrow$ minorants pour x_2 en fonction de x_1 :

$$\left.\begin{array}{rcrr} x_2 & \geq & (2/11)x_1 & -(3/11) \end{array}\right\} \mathcal{I}_2$$

Il existe une solution dans **R** ssi :
minorants $(x_2) \leq$ majorants (x_2) :

minorants $(x_2) \leq$ majorants (x_2) :
permet d'éliminer x_2

$$\begin{array}{cccrr} (2/11)x_1 & -(3/11) & \leq & (3/2)x_1 & -(5/2) \\ (2/11)x_1 & -(3/11) & \leq & -(1/3)x_1 & +(4/3) \\ -2x_1 & & \leq & -3 & \end{array}$$

En simplifiant :

$$\begin{array}{ccc} -(29/22)x_1 & \leq & -(49/22) \\ (17/33)x_1 & \leq & (53/33) \\ -2x_1 & \leq & -3 \end{array}$$

majorants et minorants pour x_1 :
diviser chaque inégalité par le coefficient de x_1 ou son opposé :

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \leq & (53/17) \sim 3.1 \\ x_1 & \geq & (49/29) \sim 1.7 \\ x_1 & \geq & (3/2) = 1.5 \end{array}$$

Le système est donc <u>équivalent</u> (dans $\mathbf{R}^2$) à :

$$\frac{49}{29} \leq x_1 \leq \frac{53}{17}$$

$$\frac{2}{11}x_1 - \frac{3}{11} \leq x_2 \leq \ \mathsf{min} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{3}{2}x_1 & - & \frac{5}{2} \ , \\ \\ -\frac{1}{3}x_1 & + & \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

D'où un encadrement de x_2 :

$$.03 \sim \frac{1}{29} \leq x_2 \leq \ \mathsf{min} \ (\frac{37}{17}, \frac{67}{87}) \sim .77$$

Intervalle non vide :
<u>il existe des solutions réelles</u>

Cas général :

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j \leq c_i,\ 1 \leq i \leq m$$

Existe-t-il une solution <u>réelle</u> de ce système ?

Si tous les coefficients de x_j sont de même signe :

$$(\forall i\ a_{ij} \leq 0) \vee (\forall i\ a_{ij} \leq 0)$$

Alors : oublier les inéquations contenant x_j.
On pourra toujours les satisfaire en choisissant x_j assez grand.

Sinon : ramener le problème à un système comprenant une variable en moins par élimination

– Choisir une variable à éliminer
par exemple x_1

– Réordonner les inéquations selon le signe du coefficient de x_1 :
$\mathcal{I}_1$: inéquations du système dans lesquelles
le coefficient de x_1 est > 0
$\mathcal{I}_2$: inéquations du système dans lesquelles
le coefficient de x_1 est < 0
$\mathcal{I}_0$: inéquations du système dans lesquelles
le coefficient de x_1 est $= 0$

$$\left.\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j \leq c_i,\ a_{i1} > 0\right\}\mathcal{I}_1$$

$$\left.\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j \leq c_i,\ a_{i1} < 0\right\}\mathcal{I}_2$$

$$\left.\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j \leq c_i,\ a_{i1} = 0\right\}\mathcal{I}_0$$

Pour chaque $i \in \mathcal{I}_1$, $i' \in \mathcal{I}_2$, le système implique :

$$c_{i'} - \sum_{j=2}^{j=n} (a_{i'j}/a_{i'1})x_j \le x_1$$

$$x_1 \le c_i - \sum_{j=2}^{j=n} (a_{ij}/a_{i1})x_j$$

D'où un nouveau système sans x_1 :

$$c_{i'} - \sum_{j=2}^{j=n} (a_{i'j}/a_{i'1})x_j \le \quad c_i - \textstyle\sum_{j=2}^{j=n} (a_{ij}/a_{i1})x_j$$

$$(i \in \mathcal{I}_1,\ i' \in \mathcal{I}_2)$$

$$\sum_{j=2}^{j=n} a_{kj}x_j \le c_k,\ k \in \mathcal{I}_0$$

Terminaison de Fourier-Motzkin :

L'algorithme se termine lorsque :

- on ne peut plus éliminer de variable,

- on trouve que les bornes d'une variable définissent un intervalle vide :
  pas de solution

Complexité ?

Complexité potentielle de la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin

risque de croissance exponentielle :

le nombre d'inéquations du nouveau système est $|\mathcal{I}_0| + |\mathcal{I}_1| * |\mathcal{I}_2|$

Si $|\mathcal{I}_1| = |\mathcal{I}_2| = m/2$

nombre d'inéquations
du nouveau système $= m^2/4 + |\mathcal{I}_0|$

Complexité dans le pire cas : $(n+1)(\frac{|\mathcal{I}|}{2})^{2^n}$
(n nombre de variables, $\mathcal{I}$ système initial)

V. Weispfenning 1994

`http://www.fmi.uni-passau.de/forschung/mip-berichte/MIP-9404.ps.gz`

Remarque :

le nombre d'inéquations n'augmente pas
si $|\mathcal{I}_1| = 1$ ou $|\mathcal{I}_2| = 1$
ou $|\mathcal{I}_1| = |\mathcal{I}_2| = 2$

Existence de solution <u>entière</u>?

Prendre les parties entières des bornes des intervalles

Dans l'exemple :

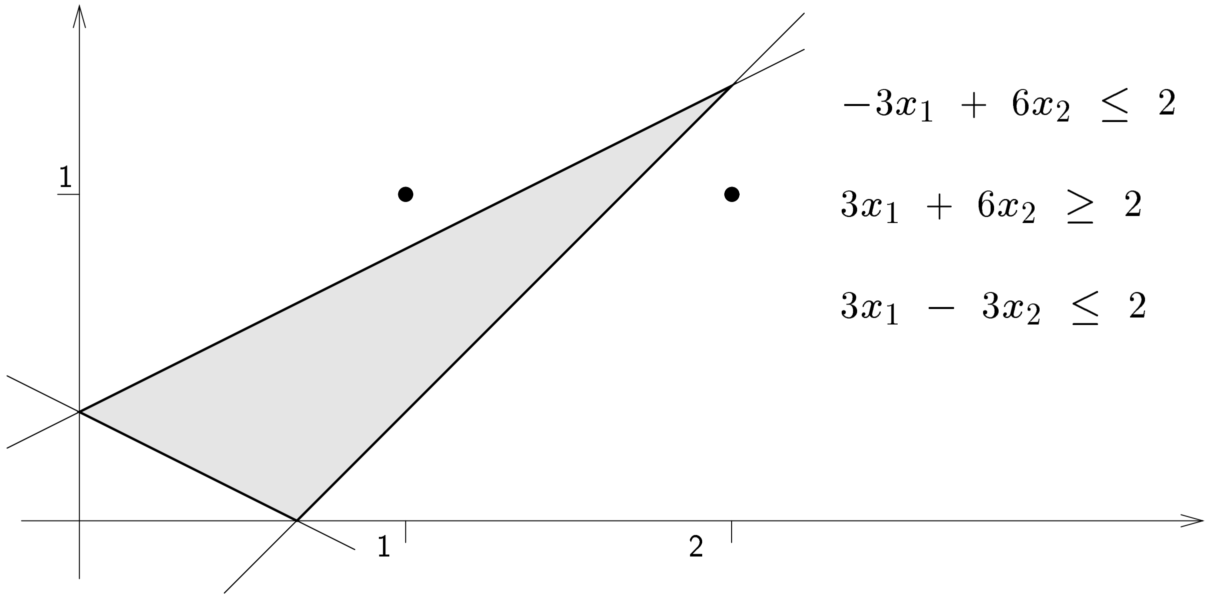
$$\left.\begin{array}{l} \frac{49}{29} \leq x_1 \leq \frac{53}{17} \\ \\ x_1 \text{ entier} \end{array}\right\} \implies 2 \leq x_1 \leq 3$$

Ce qui implique pour x_2 :

$$0.09 \sim \frac{1}{11} \leq x_2 \leq \frac{2}{3} \sim .67$$

L'intervalle pour x_2 ne contient pas de valeur entière :
<u>donc le système ne possède pas de solution entière</u>

Mais en général,
l'élimination de Fourier-Motzkin
n'est pas une méthode exacte dans Z^n :



$$-3x_1 + 6x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 2$$

$$3x_1 - 3x_2 \leq 2$$

Elimination de $x_1 \Longrightarrow$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{4}{3}$$

x_2 entier :

$$0 \leq x_2 \leq 1$$

Un intervalle non vide pour x_2 contenant des entiers ne garantit pas l'existence d'un vecteur solution (x_1, x_2) à valeurs entières.

Fourier-Motzkin indique l'existence de solutions dans $\mathbf{R}^n$: peut-être pas de solution entière

Remarque :
méthode exacte si les coefficients sont $+1$ ou -1

$$\begin{array}{ccccccccc} -x_1 & + & a_{11}x_2 & + & \ldots & \leq & c_1 \\ +x_1 & + & a_{21}x_2 & + & \ldots & \leq & c_2 \end{array}$$

“Omega-test”

méthode exacte dérivée de Fourier-Motzkin
(Pugh 1992)
`http://www.cs.umd.edu/projects/omega/omega.html`

Fourier-Motzkin n'est pas une méthode exacte dans Z^n

Système de la forme :

$$\begin{array}{rcl} & \alpha y & \leq \quad a \\ b \quad \leq & \beta y & \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha, \beta & \text{constantes} \quad > 0 \\ a, b & \text{fonctions linéaires indépendantes de} \quad y \end{array} \right.$$

Eliminer y : $\alpha b \leq \alpha\beta y \leq \beta a$

Il existe des solutions réelles ssi : $\alpha b \leq \beta a$

S'il n'existe pas d'entier multiple de $\alpha\beta$ dans l'intervalle $[\alpha b, \beta a]$:
<u>pas de solution entière</u>

pas d'entier dans $[\alpha b, \beta a]$

$\iff \exists\, i$ entier :

$\alpha\beta i < \alpha b \leq \beta a < \alpha\beta(i+1)$

$(i = \lfloor b/\beta \rfloor)$

Comme i est entier :

$\alpha\beta i + \alpha \leq \alpha b \leq \beta a \leq \alpha\beta(i+1) - \beta$

Donc s'il n'existe pas de multiple entier de $\alpha\beta$ entre αb et βa alors :

$$\beta a - \alpha b \leq \alpha\beta - \beta - \alpha$$

$$\begin{aligned} \neg\,(\beta a - \alpha b \leq \alpha\beta - \beta - \alpha) &\equiv \\ (\beta a - \alpha b) &\geq \alpha\beta - \beta - \alpha + 1 \\ &= (\alpha - 1)(\beta - 1) \end{aligned}$$

Réciproquement :
Si :

$$\boxed{\beta a - \alpha b \geq (\alpha - 1)(\beta - 1)}$$

Alors il existe un multiple entier de $\alpha\beta$
entre αb et βa

Ajouter au système cette nouvelle contrainte
(indépendante de y)

Continuer l'élimination des autres variables :
si l'algorithme répond qu'il existe une solution, on est sûr que le système initial a une solution dans les entiers.

Remarque :
Si $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$: pas de nouvelle contrainte
(Fourier-Motzkin exacte dans ce cas)

Pour avoir une réponse exacte : voir plus loin

ω-test : exemple

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 & \leq & 3x_1 \\ 3x_2 & \geq & 2x_1 - 1 \\ x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

Projection inexacte le long de x_1
$\implies \lceil -\frac{3}{5} \rceil \leq x_2 \leq 2$

$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ a = 3x_2 + 1,\ b = 2x_2$

La nouvelle contrainte

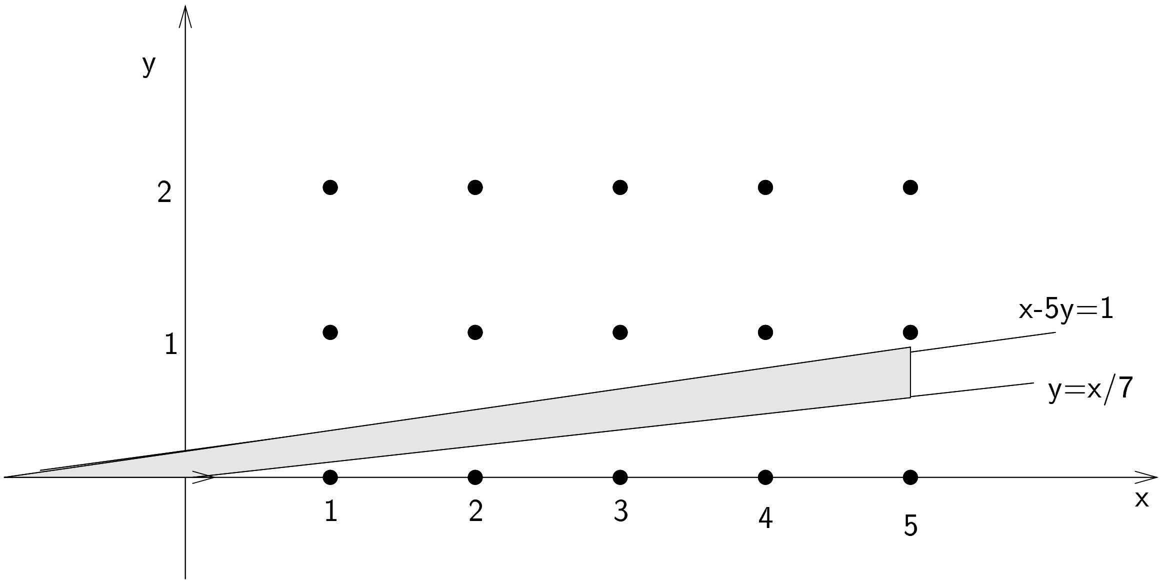
$$3(3x_2 + 1) - 2(2x_2) \geq 6 - 3 - 2 + 1$$

$$2 \geq x_2 \geq \lceil -\frac{1}{5} \rceil = 0$$

$\implies$ il existe des solutions entières
(on peut l'affirmer !)

ω-test : autre exemple

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ -x + 5y \leq 1 \\ x - 7y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} x \leq 7y \\ 5y \leq x+1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 5, \quad a = x+1, \\ b = x, \quad \beta = 7 \end{array}$$

Éliminer y :

$$\begin{aligned} \beta a - \alpha b \geq \alpha\beta - \beta - \alpha + 1 \\ \iff \quad 2x \geq 17 \end{aligned}$$

Nouvelle contrainte : $x \geq \frac{17}{2}$

Incompatible avec $x \leq 5$

S'il n'y a pas de point entier dans la projection
définie par $(\alpha - 1)(\beta - 1) \leq (\beta a - \alpha b)$
peut-il exister un multiple entier de $\alpha\beta$
entre αb et βa ?

Comment obtenir une réponse exacte?

Si $(\beta a - \alpha b) < (\alpha - 1)(\beta - 1)$
et $\exists z \in Z,\ \beta a \geq \alpha\beta z \geq \alpha b$:

On pose : $z' = \beta z - b$:

$$z' \geq 0$$
$$\beta a \geq \alpha\beta z = \alpha(z' + b) = \alpha z' + \alpha b$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) > \beta a - \alpha b \geq \alpha z'$$

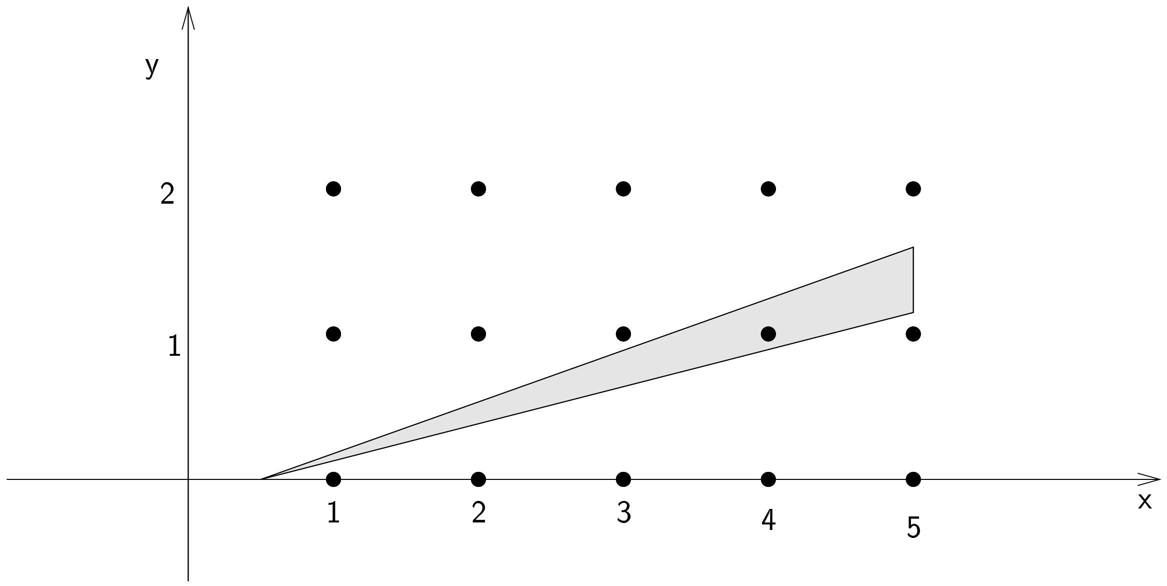
$$\alpha\beta - \alpha - \beta \geq \beta a - \alpha b \geq \alpha z'$$

Algorithme :

Si $(\beta a - \alpha b) < (\alpha - 1)(\beta - 1)$:
pour chaque z' entier
tel que $0 \leq z' \leq (\alpha\beta - \alpha - \beta)/\alpha$
tester le système avec la contrainte :
$\beta z = \beta + z'$

Théorème : réponse exacte dans les entiers

Interprétation géométrique de l'ω-test



P"

(projection "sombre")

$\beta a - \alpha b \geq (\alpha - 1)(\beta - 1)$

P'

(projection "réelle")

$\beta a - \alpha b \geq 0$

Interprétation géométrique de l'ω-test (suite)

Problème d'origine : existence de points entiers dans un polyèdre P $\subseteq$ $\mathbf{R}^n$?

Fourier-Motzkin :
éliminer y $\Longleftrightarrow$ projeter le long d'un axe Oy

- la projection P' : polyèdre de $\mathbf{R}^n - 1$
  (intervalle si $n = 2$)

- Si P' ne contient pas de points entiers : pas de solution entière dans P

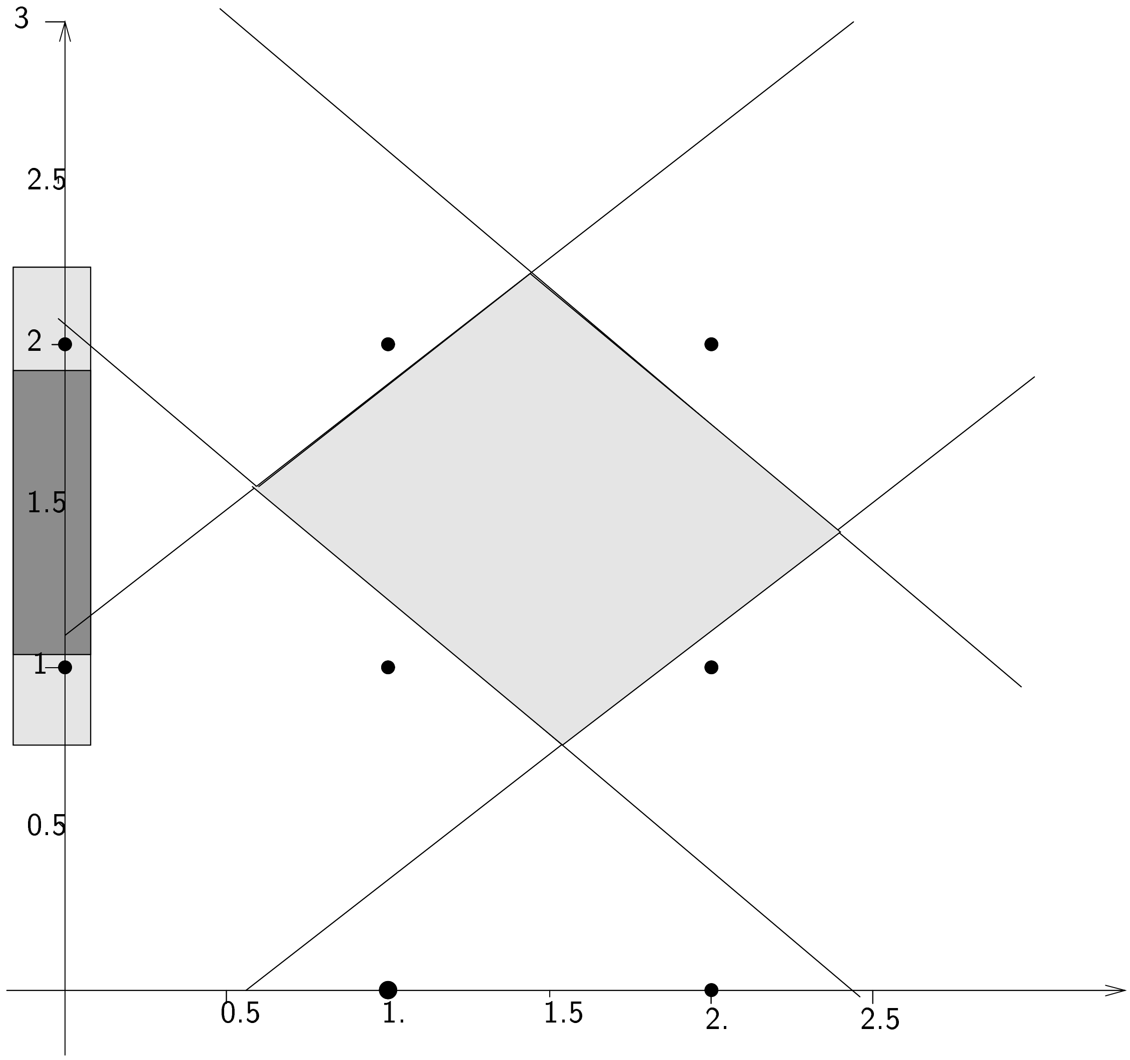
- Sinon former P" : projection *"sombre"*
  Si P" contient des points entiers :
  P aussi

Si P" ne contient pas de points entiers et P' $\neq$ P" :
S'il existe une solution entière au problème d'origine :
doit être proche d'un plan bornant P

Interprétation géométrique de l'ω-test (suite)
Si P" ne contient pas de points entiers et P' $\neq$ P" :
S'il existe une solution entière au problème d'origine :
proche d'un plan bornant P

Pour chaque borne inférieure Q de x
tester l'intersection de P
avec un plan parallèle à Q,
"proche" de Q

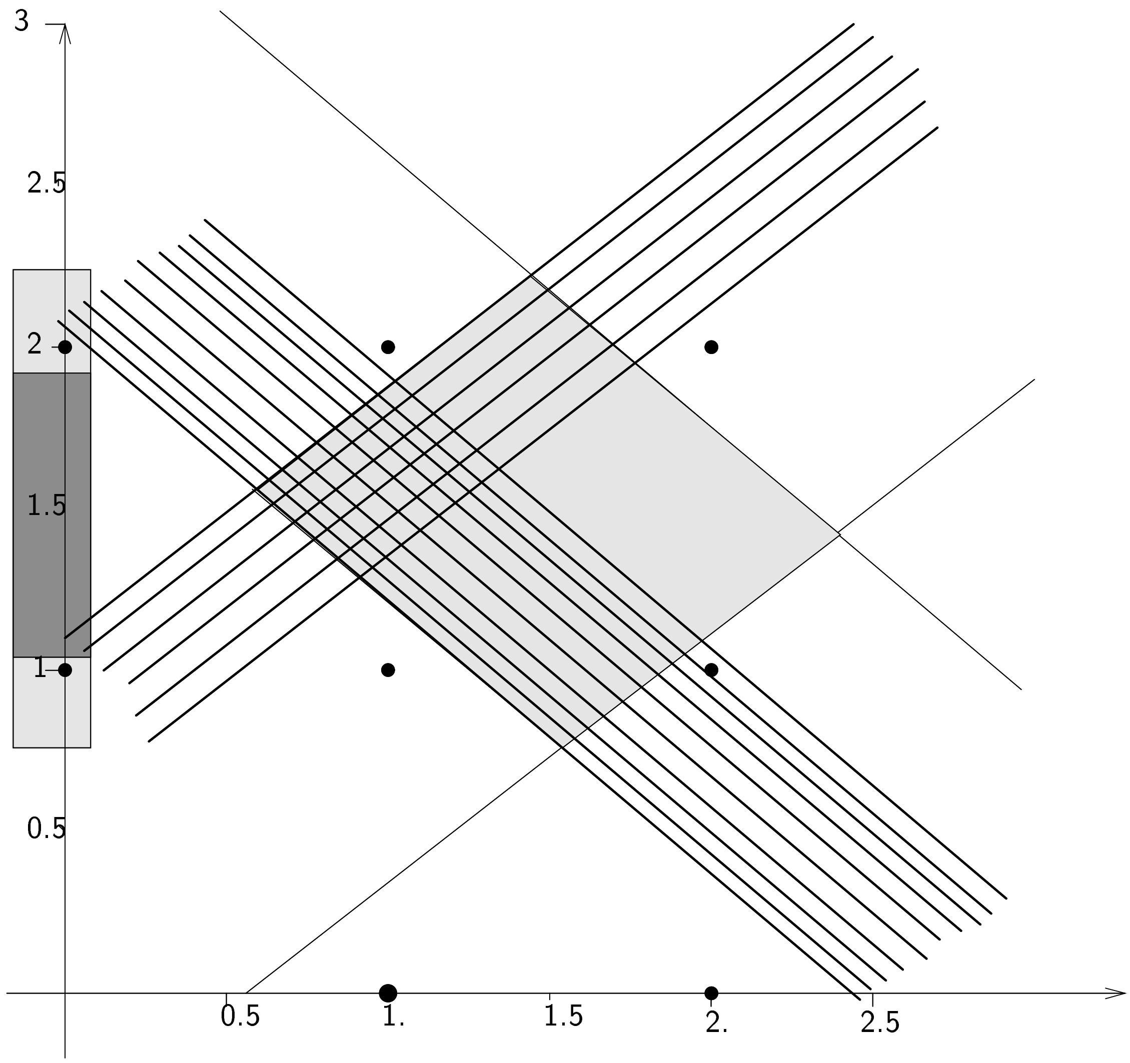
Un exemple “dur” pour l’ω-test (mais pathologique !)



Élimination de x

Il faut tester l'intersection avec chacune des droites

$$\begin{array}{ll} 7x = 9y - 10 + j & (0 \leq j \leq 5) \\ 11x = 27 - 13y + j & (0 \leq j \leq 9) \end{array}$$



Un autre exemple : $\begin{cases} -10x + 19y + 9 \geq 0 \\ 10x + 1 \geq 0 \\ -2y + 1 \geq 0 \end{cases}$

Élimination de y
(ombre réelle) : $\frac{10}{19} \leq y \leq \frac{1}{2}$

Ombre "sombre" :
$\frac{1}{190} \leq y$

Tester l'intersection avec les droites :

$$10x = -1 + j$$

pour $j = 0, 1, \ldots, 8$

Intersection non vide pour $j = 1$

L'ω-test permet de décider si un système d'inéquations admet des solutions entières

Applications de l'ω-test :
1. Tests de dépendances
2. Simplifications de formules logiques

Analyse des dépendances *"value-based"*
Pugh et Wonnacott 1993
`ftp://ftp.cs.umd.edu/pub/papers/papers/ncstrl.umcp/CS-TR-3196/CS-TR-3196.ps.Z`

$\langle \mathtt{A}, \vec{I} \rangle \; \delta \; \langle \mathtt{B}, \vec{J} \rangle$ si :

- référencent le même tableau X :
  A : $\mathtt{X(f(}\vec{I}\mathtt{))}$ = ...
  B : ... = $\mathtt{X(g(}\vec{J}\mathtt{))}$
- équation de dépendance : $\mathtt{f(}\vec{I}\mathtt{)} = \mathtt{g(}\vec{J}\mathtt{)}$
- bornes de boucles
- $\langle \mathtt{A}, \vec{I} \rangle \prec \langle \mathtt{B}, \vec{J} \rangle$
- Il n'existe pas $\langle \mathtt{C}, \vec{K} \rangle$
  $\langle \mathtt{A}, \vec{I} \rangle \prec \langle \mathtt{C}, \vec{K} \rangle \prec \langle \mathtt{B}, \vec{J} \rangle$
  $\langle \mathtt{C}, \vec{K} \rangle$ écrit le même élément que $\langle \mathtt{A}, \vec{I} \rangle$

Un exemple de calcul de dépendances par l'ω-test

```
     DO I = 1, 100
S1:     XL(1) = I
S2:     XL(2) = I+1
        DO J = 1,2
S3:        IF (XL(J).GEQ.2) XL(J) = 1 + XL(J)
        END DO
        Y(I) = XL(1) + XL(2)
     END DO
```

$\langle$`S3, (I'',J'')`$\rangle$ peut-elle dépendre de $\langle$`S3,(I,J)`$\rangle$ avec `I` $<$ `I''` ?

Relation entre (i, j) et (i'', j'') :

$$\begin{aligned} 1 \leq i < i'' \leq 100,\ 1 \leq j = j'' \leq 2 \\ \wedge\neg(\exists i' \ : i < i' = i'' \wedge j'' = 1) \\ \wedge\neg(\exists i' \ : i < i' = i'' \wedge j'' = 2) \end{aligned}$$

(*"value-based"*)

$\wedge$: et booléen

Simplification :

$$1 \leq i < i'' \leq 100,\ 1 \leq j = j'' \leq 2$$
$$\wedge \neg(j \leq 1) \wedge \neg(j \geq 2)$$

Polyèdre vide : pas de solution !

Comment simplifier ?

Utilisation de l'opérateur *"gist"*[1] :

gist B given A : information nouvelle apportée par un prédicat B, connaissant A

Définition :

gist B given A = formule la plus simple telle que :

$$A \ \wedge \ (\text{ gist } B \text{ given } A\ ) \ = \ A \ \wedge \ B$$

Propriétés de "gist" :

1. $A \ \wedge \ \neg\ B \ = \ A \ \wedge \ \neg$ (gist B given A)
2. ($A \Longrightarrow B$) ssi $A = (A \wedge B)$
   ssi (gist B given A = True)

1. En anglais, *"gist"* = essence, substance d'une question

Démonstrations :

1. $\neg(A \wedge \neg(\text{ gist } B \text{ given } A))$
$= \neg A \vee \neg \text{ gist } B \text{ given } A$
$= (\neg A \vee \neg \text{ gist } B \text{ given } A) \wedge (\neg A \vee A)$
$= \neg A \vee (A \wedge \neg \text{ gist } B \text{ given } A)$
$= (\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg \text{ gist } B \text{ given } A)$
$= \neg A \vee \neg \text{ gist } B \text{ given } A$
$= \neg(A \wedge \text{ gist } B \text{ given } A)$

2. $(A \implies B)$
$\iff (\neg A \vee B = \text{True})$
$\iff (A \wedge \neg B = \text{False})$
$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B = \neg A \vee (\neg B \wedge A)$

2.a Si $A \implies B$:
$\neg(A \wedge B) = \neg A$
2.b Si $(A \wedge B) = A$:
$(\neg A \vee B) = (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee A)$
$= \neg A \vee (B \wedge A) = \neg A \vee A = \text{ True}$
2.c Si gist B given $A =$ True :
Par définition du gist :
$A \wedge B = A \wedge (\text{ gist } B \text{ given } A) = A \wedge \text{ True}$
2.d Si $A = (A \wedge B)$:
True satisfait la propriété de définition du gist

p : conjonction de formules
gist p given q :
sous ensemble $minimal$ de contraintes de p
tel que :
$p \wedge q = (\ q \wedge (\ \text{gist}\ p\ \text{given}\ q\ )\ )$

Exemple :
gist (($1 \leq i \leq 5$) given ($1 \leq i \leq 10$))
$= (\ i \leq 5\ )$

Calcul de gist : pour une conjonction : $p = c_1 \wedge c_2$
gist (p, q) ?

c_1 est redondant ssi : $(c_2 \wedge q) \Longrightarrow c_1$ est toujours vrai

$(c_2 \wedge q) \Longrightarrow c_1$ est-elle une tautologie ?
Chercher à montrer le contraire

$$\begin{aligned}\neg((c_2 \wedge q) \Longrightarrow c_1) &= \neg(\neg c_2 \vee \neg q \vee c_1) \\ &= \neg c_1 \wedge c_2 \wedge q\end{aligned}$$

- Si $\neg c_1 \wedge c_2 \wedge q$ satisfiable :
  $p \wedge q = c_1 \wedge (c_2 \wedge q) = c_1 \wedge ($ gist c_2 given $q) \wedge q$
  Donc : gist p given $q = c_1 \wedge$ (gist c_2 given q)

- Si $\neg c_1 \wedge c_2 \wedge q$ non satisfiable :
  alors $((c_2 \wedge q) \Longrightarrow c_1)$ est une tautologie
  $(p \wedge q) = c_1 \wedge (c_2 \wedge q) = (c_2 \wedge q)$
  $= ($ gist c_2 given $q) \wedge q$
  D'où : gist p given $q =$ gist c_2 given q

Exemple :
gist $(1 \leq i \leq 5)$ given $(1 \leq i \leq 10)$?

$c_1 = (1 \leq i) \quad c_2 = (i \leq 5)$
$\neg c_1 = (1 > i)$

$(i < 1) \wedge (i \leq 5) \wedge (1 \leq i \leq 10) \;\equiv\;$ False
gist $(1 \leq i \leq 5)$ given $(1 \leq i \leq 10)$
    $=$ gist $(i \leq 5)$ given $(1 \leq i \leq 10)$

$\neg(i \leq 5) \;=\; (i > 5)$
$(i > 5) \wedge (1 \leq i \leq 10) = (5 < i \leq 10)$:
    satisfiable
gist $(1 \leq i \leq 5)$ given $(1 \leq i \leq 10)$
    $= (i \leq 5) \wedge$ gist True given $(1 \leq i \leq 10)$
    $= (i \leq 5)$

Calcul de gist :
p, q conjonctions de formules

Algorithme :

gist p given $q =$
  si $p =$ True alors True
  sinon
    c : une contrainte dans p
    $p' = p$ avec c remplacé par $\neg c$
    $p'' = p$ avec c remplacé par True
    Si $p' \wedge q$ est satisfiable
      alors $c \wedge$ gist (p'' given ($q \wedge c$))
      sinon gist (p'' given ($q \wedge c$))

Exemple :
A : $1 \leq i < i'' \leq n$
B : $(i < i' = i'') \quad \equiv \quad (i < i') \wedge (i' = i'')$
gist B given A?
Appliquons l'algorithme :

1/ c : $(i < i')$
B' : $(i \geq i') \wedge (i' = i'')$
$A \wedge B'$ non satisfiable
B'' : True $\wedge (i' = i'') = (i' = i'')$
gist B given $A =$ gist B'' given $(A \wedge (i < i'))$
2/ gist ($(i' = i'')$) given $(A \wedge (i < i'))$?
c : $(i' = i'')$
$\neg c \wedge (A \wedge (i < i'))$
$\quad = (1 \leq i < i' < i'' \leq n)$
$\quad\quad \vee((i' > i'') \wedge (1 \leq i < i'' \leq n))$: satisfiable
Donc :
gist B given $A =$
$\quad (i' = i'') \wedge$
$\quad\quad$ gist (True given $\wedge$ $(A \wedge (i < i'))$)

$$\text{gist } B \text{ given } A \quad = \quad (i' = i'')$$

Conséquence :
un exemple de simplification :

$A = (1 \le i < i'' \le n)$,
$B = (i < i' = i'')$

$$
\begin{aligned}
A \ \wedge \ \neg \ B \ = \ & A \ \wedge \ \neg \ (\text{ gist } B \text{ given } A \ ) \\
& = (1 \le i < i'' \le n) \ \wedge \ \neg \ (i' = i'') \\
& = (1 \le i < i'' \le n) \\
& \quad \wedge \ (\ (i' > i'') \ \vee (i' < i'') \ )
\end{aligned}
$$

Simplification des formules de Presburger : complexité théorique $O(2^{2^{2^n}})$

Complexité pratique de l'ω-test ?
Acceptable
Heuristiques pour estimer l'expansion des termes par négation