Topologie de Scott

François Thomasset
INRIA

7 août 2001

Définition : CPO $(D, \sqsubseteq)$ est un cpo ssi :

- ordre partiel
- pour toute chaîne croissante $d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq d_n \sqsubseteq \ldots$ d'éléments de D, il existe une borne supérieure (lub) $\bigsqcup\{d_n\}$

Définition : Treillis complet $(D, \sqsubseteq)$

- order partiel
- $\forall X \sqsubseteq D$, il existe $\bigsqcup X$

Définition : continuité Soient D, E des cpos ; $f \ : D \to E$ est continue si :

- f est monotone
- Pour toute chaîne croissante $d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq d_n \sqsubseteq \ldots$:
  $\bigsqcup_n f(d_n) = f(\bigsqcup_n d_n)$

Dans ce qui suit, $(D, \sqsubseteq)$ est un cpo.

Définition : topologie de Scott $U \subseteq D$ est *ouvert* ssi :

- $\forall d, e \in D \ : d \sqsubseteq e \ \& \ d \in U \Longrightarrow e \in U$
- Pour toute chaîne croissante $d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq \ldots$:
  $\bigsqcup_n d_n \in U \Longrightarrow \exists n \ : d_n \in U$

Théorème 1 : La topologie de Scott est une topologie au sens classique : $\emptyset$ et D sont des ouverts, toute intersection finie d'ouverts est ouverte ; toute union d'ouverts est un ouvert.
<u>Démonstration</u>

1. Si $U = \emptyset$, les pré-conditions sur $d \in U$ sont trivialement satisfaites : $\emptyset$ est ouvert.
2. Si $U = D$, les post-conditions sur $d \in U$ sont trivialement satisfaites : D est ouvert.

3. Soit une famille finie d'ouverts : $U_0, \ldots, U_k$.
   $U = U_0 \cap \ldots \cap U_k$

   (a) Soit $d \in U$, et $d \sqsubseteq e$. Pour tout i, $d \in U_i$, d'où $\forall i, e \in U_i : e \in U_0 \cap \ldots \cap U_k = U$

   (b) Soit une suite croissante $d_0 \sqsubseteq \ldots$
   Pour tout i, $\exists n_i : d_{n_i} \in U_i$, car U_i est ouvert.
   Soit $n = \text{Max } \{n_0, \ldots, n_k\}$.
   $\forall i, d_{n_i} \sqsubseteq d_n$ (suite croissante), d'où $d_n \in U_i$ (U_i ouvert).
   Donc $d_n \in U_0 \cap \ldots \cap U_k = U$

4. Soit une famille d'ouverts : $\{U_i, i \in I\}$, et $U = \bigcup_{i \in I} U_i$

   – Si $d \in U$, et $d \sqsubseteq e$:
   $\exists i \in I \ : \ d \in U_i$, d'où $e \in U_i \subseteq U$ (U_i ouvert).

   – Soit une suite croissante $d_0 \sqsubseteq \ldots$
   Si $d = \bigsqcup_n d_n \in U : \exists i \in I \ : d \in U_i$.
   Comme U_i est ouvert : $\exists n \ : d_n \in U_i \subseteq D$.

◇

Théorème 2 : Pour tout $d \in D$, $\{x \mid x \not\sqsubseteq d\}$ est ouvert.
<u>Démonstration</u>
$U = \{x \mid x \not\sqsubseteq d\}$

1. Soit $x \in U$, et $e \in D$ avec $x \sqsubseteq e$.
   Supposons $e \notin U$: alors $e \sqsubseteq d$.
   $x \sqsubseteq e \ \& \ e \sqsubseteq d \implies x \sqsubseteq d \implies x \notin U$: contradiction.
   Donc $e \in U$.

2. Soit une suite croissante $d_0 \sqsubseteq \ldots$
   Supposons que $\bigsqcup_n d_n \not\sqsubseteq d$.
   Si pour tout n, $d_n \notin U$, alors $\forall n, d_n \sqsubseteq d$: d est un majorant de tous les d_n, donc $d \sqsupseteq \bigsqcup_n d_n$: contradiction.
   Donc $\exists n \ : d_n \in U$.

Donc U est ouvert. ◇

Définition : topologiquement continue Une fonction $f \ : D \to E$ est topologiquement continue si pour tout ouvert V de E, $f^{-1}V$ est un ouvert de D.

Théorème 3 : f est continue ssi f est topologiquement continue.
<u>Démonstration</u>

$\Rightarrow$ Supposons que f est (Scott-)continue.
Soit V un ouvert de E, et $U = f^{-1}V$: il faut montrer que U est ouvert.

1. Soit $d \in U$, avec $d \sqsubseteq e$.
   $f(d) \in V$.

$d \sqsubseteq e \Longrightarrow f(d) \sqsubseteq f(e)$ (monotonie)
D'où $f(e) \in V$. (V ouvert), i.e. $e \in f^{-1}V$.

2. Soit une suite croissante $d_0 \sqsubseteq \ldots$
   Supposons $\bigsqcup_n d_n \in f^{-1}V$.
   $\bigsqcup_n f(d_n) = f(\bigsqcup_n d_n) \in V$ (continuité)
   $f(d_n)$ est une chaîne croissante (monotonie).
   Donc $\exists n \ : f(d_n) \in V$ (V ouvert), i.e. $\exists n \ : d_n \in f^{-1}V$.

$\Leftarrow$ Supposons que f est topologiquement continue.
Soit une suite croissante $d_0 \sqsubseteq \ldots$
Soit $d \bigsqcup_n d_n$.
Il faut montrer que $f(d) = \bigsqcup_n f(d_n)$.
Par monotonie on a facilement : $f(d) \sqsupseteq \bigsqcup_n f(d_n)$.
Soit $Y = \{y \mid y \sqsubseteq \bigsqcup_n f(d_n)\}$: est-ce que $f(d) \in Y$?
$\overline{Y} = D - Y$ est ouvert (Théorème 2), donc $f^{-1}\overline{Y}$ est ouvert.
Supposons $f(d) \notin Y$, i.e. $d \in f^{-1}\overline{Y}$.
Comme $\overline{Y}$ est ouvert, et $d \bigsqcup_n d_n$, $\exists n \ : d_n \in \overline{Y}$, i.e. $f(d_n) \notin Y$.
Or par définition de Y : pour tout n, $f(d_n) \sqsubseteq \bigsqcup_m f(d_m)$, i.e. $f(d_n) \in Y$: contradiction ! Donc $f(d) \in Y$.

$\diamond$

Notation : $\mathbf{O}$ = cpo à deux éléments $\perp$ et $\top$, avec $\perp \sqsubseteq \top$.

Théorème 4 : U est ouvert dans D ssi il existe une fonction continue $f \ : D \to \mathbf{O}$ telle que $U = f^{-1}(\top)$.
<u>Démonstration</u>

$\Rightarrow$ Soit U un ouvert. On pose : $f \ : D \to \mathbf{O}$: $f(x) = \begin{array}{ll} \top & \text{si } x \in U \\ \perp & \text{si } x \notin U \end{array}$.
f vérifie bien $U = f^{-1}(\top)$.
Soit une suite croissante $d_0 \sqsubseteq \ldots$ Soit $d = \bigsqcup_n d_n$

- Si $d \in U$: $f(d) = \top$ (définition de f) et $\exists n \ : d_n \in U$ (U est ouvert).
  D'où $f(d_n) = \top = \bigsqcup_n f(d_n) = f(d)$
- Si $d \notin U$: s'il existe un n tel que $d_n \in U$, alors $d_n \sqsubseteq d$ et U ouvert impliqueraient $d \in U$.
  Donc $\forall n, d_n \notin U$: $f(d_n) = \perp$.
  D'où $\perp = \bigsqcup_n f(d_n) = f(d)$.

$\Leftarrow$ Résulte du théorème 3.

$\diamond$

The Formal Semantics of Programming Languages
Glynn Winskel, MIT Press. 1993.
I1954. page 123