Espaces vectoriels

J.Ch. Gilbert, INRIA

Espace vectoriel

- Un **espace vectoriel** sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni d'une loi interne $+ : (x, y) \in E \times E \mapsto (x + y) \in E$, vérifiant :

  $(A.1)$ (associativité) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in E$,
  $(A.2)$ (commutativité) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in E$,
  $(A.2)$ (existence d'un **neutre**) $\exists 0 \in E$: $0 + x = x$, $\forall x \in E$,
  $(A.2)$ (existence d'un **opposé**) $\forall x \in E$, $\exists (-x) \in E$: $x + (-x) = 0$,

  et d'une loi externe (non notée) $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto (\alpha x) \in E$, vérifiant :

  $(B.1)$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$,
  $(B.2)$ $(\alpha + \beta)x = (\alpha x) + (\beta x)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$,
  $(B.2)$ $\alpha(x + y) = (\alpha x) + (\alpha y)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$,
  $(B.2)$ $1x = x$, $\forall x \in E$ (1 étant l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{K}$).

  On note $x + (-y) = x - y$.

- Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**, ceux de E sont appelés des **vecteurs** ou des **points**.

- <u>Propriétés immédiates</u>: on note momentanément $\underline{0}$ le neutre de E pour le distinguer du neutre 0 de $\mathbb{K}$.

  1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$: $\alpha\underline{0} = \underline{0}$ et $0x = \underline{0}$.
  2) $\alpha x = \underline{0} \Longrightarrow \alpha = 0$ ou $x = \underline{0}$.
  3) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$.

- <u>Exemples</u>.

  1) Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, on note $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des n-uples $x = (x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments x_i de $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations suivantes :

  $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

  $$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

  2) Si X est un ensemble quelconque et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des applications $f : X \to E$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour les opérations suivantes :

  $$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{et} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Sous-espace vectoriel

- Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si la restriction à F des lois de E font de F un espace vectoriel.

- La proposition suivante permet de vérifier facilement si une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Si E est un espace vectoriel et $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel de E ssi (i) $F \neq \emptyset$, (ii) $x, y \in F \Longrightarrow x + y \in F$, (iii) $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in F \Longrightarrow \alpha x \in F$. En particulier, $0 \in F$.

  Pour le point (i), le plus simple est de vérifier que $0 \in F$. Si c'est le cas, on poursuit dans la vérification de (ii) et (iii). Si ce n'est pas le cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel.

- Propriété.

Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Soient $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, le sous-espace vectoriel de E, noté $\text{vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$, défini par

$$\text{vect}\{v_1, \ldots, v_n\} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{K}, \text{ pour tout } i \right\}.$$

  Un vecteur de la forme $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$ est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.

Familles libre et génératrice

- On dit qu'une famille $\mathcal{F} := \{v_1, \ldots, v_p\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est **génératrice**, si $\text{vect}\mathcal{F} = E$, autrement dit si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$. On peut encore exprimer cette propriété par

$$\forall x \in E, \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K} : \quad x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i.$$

- On dit que E est de **dimension finie** si on peut trouver une famille génératrice dans E. Sinon, on dit que E est de **dimension infinie**. Sauf mention contraire, les espaces vectoriels considérés seront toujours de dimension finie.
- On dit qu'une famille $\mathcal{F} := \{v_1, \ldots, v_p\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est **libre**, ou encore que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ sont **linéairement indépendants**, si on a la propriété

$$\Big(\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

  Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée** ou que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ sont **linéairement dépendants**,

Si $\cdot$ $v_1, \ldots, v_p$ sont linéairement indépendants,
$\cdot$ $x \in \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$,
alors il existe des $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ *uniques* tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i.$$

Base

- On appelle **base** d'un espace vectoriel E une famille libre et génératrice.

  Autrement dit, $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de E si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, déterminés de manière unique, tels que

  $$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

  Les scalaires α_i sont appelés les **composantes** de x dans la base $\mathcal{B}$.

- Exemple.

  La **base canonique** de $\mathbb{K}^n$ est formée des vecteurs

  $$\hat{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad 1 \leq i \leq n,$$

  où dans $\hat{e}_i$, le scalaire 1 est en i-ième position.

- Existence de bases :

  Si $\cdot$ E est un espace vectoriel de dimension finie,
  $\cdot$ $E \neq \{0\}$,
  alors (*i*) E a une base,
  (*ii*) de toute famille génératrice, on peut extraire une base,
  (*iii*) toute famille libre peut être complétée de manière à former une base (théorème de la "base incomplète").

- Dimension d'un espace vectoriel.

  Si E est un espace vectoriel de dimension finie,
  alors toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

  Ce résultat permet de définir la **dimension** d'un espace vectoriel comme le nombre de vecteurs contenus dans une base quelconque de E. Si E est réduit au singleton $\{0\}$, on dit que E est de dimension nulle. On note cette dimension

  $$\dim_{\mathbb{K}} E \qquad \text{ou simplement} \qquad \dim E.$$

  La notation $\dim_{\mathbb{K}} E$ met en évidence l'importance du corps $\mathbb{K}$ dans le calcul de la dimension de E. On a par exemple

  $$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

<u>Corollaires</u> :

1) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \dim E = n \geq 1, \\ \text{alors } (i) \text{ une famille génératrice de } n \text{ vecteurs est une base,} \\ \qquad\quad (ii) \text{ une famille libre de } n \text{ vecteurs est une base.}\end{array}}$

2) Si · E est un espace vectoriel de dimension finie,
   · F est sous-espace vectoriel de E,
alors
$$\dim F \leq \dim E,$$
avec égalité si et seulement si $F = E$.

Produit d'espaces vectoriels

- Soient E_1, …, E_p des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On peut mettre sur l'ensemble produit
$$E_1 \times \cdots \times E_p,$$
formé des p-uples $(x_1, \ldots, x_p)$, avec $x_i \in E_i$ pour $i = 1, \ldots, p$, une structure d'espace vectoriel. On définit l'addition par (on note $+$ l'addition dans tous les E_i)
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
et la multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ par
$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$
On reconnaît là la structure mise sur $\mathbb{K}^n$, qui est donc le produit de n exemplaires de $\mathbb{K}$.
- On a
$$\boxed{\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i.}$$
En particulier, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

Somme et somme directe, sous-espace vectoriel supplémentaire

- Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de E_1 et de E_2 le sous-espace vectoriel de E défini par
$$E_1 + E_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}.$$
Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors
$$\boxed{\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).}$$

- La décomposition de $x \in E_1 + E_2$ en $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, n'est pas nécessairement unique. Si elle l'est, on dit que $F := E_1 + E_2$ est **somme directe** de E_1 et E_2 et on note
$$F = E_1 \oplus E_2.$$

> Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E,
> alors $E_1 + E_2$ est une somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

- On dit que E_1 et E_2 sont **supplémentaires** dans E si $E = E_1 \oplus E_2$.

> Si F est un sous-espace vectoriel de E ($\dim E < \infty$),
> alors F admet un supplémentaire dans E.

> Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E,
> alors les propriétés suivantes sont équivalentes
> (i) E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E,
> (ii) $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$.