Espaces vectoriels duals

J.Ch. Gilbert, INRIA

Espace dual

- Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle **espace dual** (algébrique) de E, l'espace vectoriel E^* des formes linéaires sur E, c'est-à-dire des applications linéaires sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$:
$$E^* := L_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}).$$
On notera indifféremment
$$f(x) \quad \text{ou} \quad \langle f, x \rangle$$
la valeur prise par $f \in E^*$ au point $x \in E$.
- Propriétés immédiates :
  1) E^* est un espace vectoriel de même dimension que E.
  2) Si $\dim E = n$ et $f \in E^* \setminus \{0\}$, alors $\dim N(f) = n - 1$.
- Comme ils ont la même dimension, E et E^* sont isomorphes, mais il n'y a pas d'isomorphisme canonique (i.e., indépendant d'un choix de bases) entre E et E^*. Le résultat ci-dessous montre que l'on peut construire un isomorphisme de E dans E^* qui ne dépend que d'un choix de base sur E (et ne dépend pas d'un choix de basse sur E^*). On note
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
les **symboles de Kronecker**.

> Soit $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E.
> Alors, il existe une unique base de E^*, notée $\mathcal{U}^* = \{u_1^*, \ldots, u_n^*\}$, vérifiant
> $$u_i^*(u_j) = \delta_{ij}, \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n.$$
> De plus, l'application
> $$y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i \in E \quad \longmapsto \quad \eta_y = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i^* \in E^*$$
> est un isomorphisme de E dans E^*.

La base $\mathcal{U}^*$ introduite ci-dessus est appelée **base duale** de la base $\mathcal{U}$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \in E$, on a
$$u_i^*(x) = x_i.$$
Donc u_i^* est la forme donnant la i-ième composante de x dans la base $\mathcal{U}$. D'autre part, pour tout $f \in E^*$,
$$f = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) u_i^*.$$

Espace bidual

- On appelle **espace bidual** de E, le dual de E^*. On le note

$$E^{**} = L_{\mathbb{K}}(E^*, \mathbb{K}).$$

  Bien sûr $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$.

- Il ne sert à rien de considérer E^{***}, E^{****}, *etc.* En effet E^{**} est *canoniquement* isomorphe à E. Donc E^{**} n'est pas un ensemble essentiellement différent de E et peut être identifié à ce dernier au moyen d'un isomorphisme canonique (indépendant d'un choix de bases).

> E^{**} est *canoniquement* isomorphe à E.
> L'isomorphisme canonique est construit comme suit. Pour $x \in E$, l'application
>
> $$e_x : f \in E^* \mapsto f(x) \in \mathbb{K}$$
>
> est linéaire. C'est donc un élément de E^{**}. De plus
>
> $$e : x \in E \mapsto e_x \in E^{**}$$
>
> est un isomorphisme.

  L'application e_x est appelée **évaluatrice** en x. Elle donne en effet la valeur des formes de E^* en x. L'isomorphisme e est appelé **isomorphisme canonique** entre E et E^{**}.

Application linéaire adjointe

- Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, de dimension n et p respectivement, et $\varphi \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Si on se donne des bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de E et F respectivement, on peut représenter φ par une matrice :

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

- On appelle **transposée** de A, la matrice notée ${}^tA$ (notation française) ou $A^\top$ (notation internationale), obtenue en échangeant les éléments (i, j) et (j, i) de A :

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

  Donc si A est de type (p, n), $A^\top$ est de type (n, p).

- L'**application adjointe** φ^* de φ est une application linéaire dont la représentation matricielle dans des bases convenables est $A^\top$. Elle est construite de la manière suivante. C'est une application linéaire entre F^* et E^* :

$$\varphi^* : F^* \to E^*,$$

et, en $g \in F^*$, $\varphi^*(g) \in E^*$ a sa valeur en $x \in E$ donnée par :

$$\boxed{\langle \varphi^*(g), x \rangle = \langle g, \varphi(x) \rangle\,.}$$

Si $\mathcal{U}^*$ et $\mathcal{V}^*$ sont les bases duales de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ respectivement, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}^*,\mathcal{U}^*}(\varphi^*) = A^\top.$$

Orthogonalité dans le dual

- Soit E_0 un sous-espace vectoriel de E. On appelle **orthogonal** de E_0 dans le dual E^* (ou **annulateur** de E_0), l'espace vectoriel défini par

$$E_0^\perp := \{f \in E^* : f(x) = 0,\ \forall x \in E\}.$$

- Les dimensions sont reliées par la relation suivante :

$$\boxed{\dim E = \dim E_0 + \dim E_0^\perp.}$$

- Théorème fondamental :

> Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\varphi \in L(E, F)$. Alors
> $$R(\varphi)^\perp = N(\varphi^*),$$
> $$\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\varphi^*.$$

Corollaires :

1) Pour une matrice A quelconque :

$$\boxed{R(A)^\perp = N(A^\top).}$$

2) Le nombre de lignes linéairement indépendantes d'une matrice A est égal au nombre de ses colonnes linéairement indépendantes :

$$\boxed{\operatorname{rg} A^\top = \operatorname{rg} A.}$$