Déterminants

J.Ch. Gilbert, INRIA

- On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, ce qui veut dire que si 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{K}$, on a $1 + 1 \neq 0$ (élément neutre pour l'addition). C'est le cas de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (mais pas celui de $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, le corps des entiers modulo 2).
- On note $\mathbb{K}^{n\times n}$ l'ensemble des matrices d'ordre n dont les éléments sont dans $\mathbb{K}$.

Applications multilinéaires alternées

- Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application. On dit que f est **multilinéaire** si elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments: pour tout $i = 1, \ldots, n$ et pour tout $x_j \in E_j$ ($j \neq i$), l'application $x \in E_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est linéaire.

  Si $n = 2$, une application multilinéaire est aussi appelée **bilinéaire**.
- Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que $f : E^n \to F$ est **antisymétrique** si pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in E$, on a

  $$f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n).$$

  On voit immédiatement que l'on a aussi, pour des indices $i \neq j$:

  $$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$
- Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que $f : E^n \to F$ est **alternée** si f est nulle lorsque deux de ses arguments ont la même valeur: pour tout $x_1, \ldots, x_n, x \in E$, on a

  $$f(x_1, \ldots, x, \ldots, x, \ldots, x_n) = 0.$$

  Propriétés:

  1) Une application *multilinéaire* alternée est antisymétrique.
  2) Inversement, *lorsque* $\mathbb{K}$ *n'est pas de caractéristique* 2, une application antisymétrique est alternée.

Permutation, transposition, signature

- On appelle **permutation** de $\{1, 2, \ldots, n\}$, une application bijective

  $$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

  L'ensemble des permutations est noté $\mathcal{S}_n$.
- Toute permutation peut se décomposer en un produit fini de transpositions. Pour une permutation donnée, la parité du nombre de produits de transpositions décomposant cette permutation ne dépend pas de la décomposition choisie. On peut donc définir la **signature** d'une permutation σ comme

  $$\epsilon_\sigma = (-1)^t,$$

  où t est le nombre de transpositions d'une décomposition arbitraire de σ.

Définition du déterminant (approche de Weierstrass)

- On appelle **déterminant**, l'unique application
$$\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A \mapsto \det A,$$
vérifiant les propriétés suivantes :
    1) det est une application multilinéaire des colonnes de A,
    2) det est une application alternée des colonnes de A,
    3) $\boxed{\det I = 1.}$
- De cette définition, on déduit la formule du déterminant :
$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \epsilon_\sigma \, a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n}.}$$
On a noté $\sigma(i) = \sigma_i$ la valeur en $i \in \{1, \ldots, n\}$ de la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et ϵ_σ la signature de σ. Comme $|\mathcal{S}_n| = n!$, l'évaluation du déterminant par cette formule demande de faire $(n! - 1)$ additions et $n(n!)$ multiplications. Il y a des procédés de calcul beaucoup moins coûteux (par exemple par factorisation). La formule ci-dessus est donc plus utile en théorie qu'en pratique. Elle est notamment très utile pour démontrer certaines des propriétés ci-dessous.
- <u>Propriétés</u> :
    1) A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
    2) Le déterminant de A est nul si et seulement si une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres colonnes.
    3) Si on échange entre elles deux colonnes de A, le déterminant change de signe.
    4) Les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant de la matrice $(v_1 v_2 \cdots v_n)$ dont les colonnes sont les vecteurs v_i est non nul.
    5) $$\boxed{\det A^\top = \det A.}$$
    Cette formule permet de "dualiser" certaines propriétés précédentes en y remplaçant le mot 'colonne' par le mot 'ligne' :
        - Le déterminant de A est nul si et seulement si une de ses lignes est combinaison linéaire des autres lignes.
        - Si on échange entre elles deux lignes de A, le déterminant change de signe.
        - Les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{K}^n$ sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant de la matrice dont les lignes sont les vecteurs $v_i^\top$ est non nul.
    6) Si A et B ont le même ordre :
    $$\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B).}$$
    7) Si A est inversible :
    $$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.}$$

- On peut aussi parler du **déterminant** d'un endomorphisme f de E (c'est-à-dire d'une application $f : E \to E$ linéaire). Il est défini par

$$\det(f) = \det A,$$

où A est la matrice représentant f dans une base quelconque de E (indépendance par rapport à la base).

Matrice des cofacteurs

- Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le scalaire

$$\operatorname{cof}(a_{ij}) := (-1)^{i+j} \det A_{(i)}^{(j)},$$

où $A_{(i)}^{(j)}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A. On note

$$\operatorname{cof}(A) = \Big(\operatorname{cof}(a_{ij})\Big),$$

la matrice dont l'élément (i, j) est le cofacteur $\operatorname{cof}(a_{ij})$ de a_{ij}. Elle est appelée **matrice des cofacteurs** de A.

- On peut exprimer le déterminant en fonction des cofacteurs des éléments d'une ligne i arbitraire :

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \operatorname{cof}(a_{ij}),}$$

et également en fonction des cofacteurs des éléments d'une colonne j arbitraire :

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \operatorname{cof}(a_{ij}).}$$

- Par contre, si on somme les produits des éléments d'une ligne (resp. d'une colonne) par les cofacteurs des éléments d'une autre ligne (resp. d'une autre colonne), on obtient zéro. C'est ce qu'expriment les formules

$$\boxed{A \operatorname{cof}(A^\top) = \operatorname{cof}(A^\top) A = (\det A) I.}$$

En particulier, si A est inversible

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof}(A^\top).}$$

Rang et déterminant

- Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $v_1, \ldots, v_n$, v des vecteurs de E. On note $u_1, \ldots, u_n$, $u \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de ces vecteurs dans une même base quelconque de E.

- On appelle **mineur** d'ordre r d'une matrice A, le déterminant d'une sous-matrice d'ordre r de A.
- Propriétés :
  1) La famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de E si et seulement si $\det(u_1 \cdots u_n) \neq 0$.
  2) La famille $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est libre dans E si et seulement si on peut extraire de $(u_1 \cdots u_r)$ un mineur d'ordre r non nul.
  3) $v \in \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_r\}$ si et seulement si $\mathrm{rg}(u_1 \cdots u_r) = \mathrm{rg}(u_1 \cdots u_r\ u)$.
  4) Une matrice est de rang r si et seulement si r est l'ordre maximal des mineurs non nuls de A.

Orientation d'un espace vectoriel réel

- Soit E un espace vectoriel *réel*. On dit que deux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de E **ont la même orientation** si la matrice de changement de base a son déterminant strictement positif :

$$\det P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}} > 0.$$

  Cela définit une relation d'équivalence ayant exactement deux classes d'équivalence. Celles-ci sont appelées les **classes d'orientation** de E.
- On dit que E est **orienté** si on s'est donné (si on a choisi) une des deux classes d'orientation de E comme classe de référence. Si une base appartient à cette classe d'orientation de référence, elle est dite **orientée positivement**, sinon elle est dite **orientée négativement**.
- L'**orientation canonique** de $\mathbb{R}^n$ est celle dans laquelle on se donne comme classe d'orientation de référence, la classe de la base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Une base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est alors orientée positivement si

$$\det(v_1 \cdots v_n) > 0.$$